

# Contents

operation research	2
A-10-1029-1	3
A-10-1198-1	7
A-10-1324-1	9
A-10-1484-1	13
A-10-1485-1	16
A-10-346-1	19
A-10-432-1	23
A-10-524-1	27
A-10-593-1	32
A-10-697-1	36
A-10-802-1	39
A-10-898-1	42
A-10-902-1	45
A-10-909-1	49
A-10-967-1	53
A-10-971-1	57
A-10-977-1	61
A-10-999-1	65



چهل و پنجمین

کنفرانس ریاضی ایران

۴-۷ شهریور ۱۳۹۳



تخصص در عملیات

## بررسی و پیشنهاد مدلی جهت طراحی سیستم های پایایی

مقصود امیری، عضو هیأت علمی دانشکده مدیریت، دانشگاه علامه طباطبائی، [amiri@atu.ac.ir](mailto:amiri@atu.ac.ir)

نیما فخیم هاشمی\*، دوره دکتری رشته مدیریت گرایش تحقیق در عملیات، دانشگاه علامه طباطبائی، [hashemi@atu.ac.ir](mailto:hashemi@atu.ac.ir)  
[hashemi.ise@gmail.com](mailto:hashemi.ise@gmail.com)

**چکیده:** مساله پایایی یا قابلیت اطمینان یکی از انواع مسائل شناخته در عرصه دانش ریاضیات کاربردی است که کاربردهای بسیاری در دنیای واقعی دارد. مسائل پایایی به گروه های مختلفی تقسیم می شوند که در این مقاله به بحث طراحی بهینه سیستم های پایایی پرداخته شده است. ابتدا مدل مساله تخصیص افزونگی تشریح و مورد بحث و بررسی قرار گرفته است. در ادامه نخست برنامه ریزی آرمانی تشریح گردیده، سپس با توجه به فرضیات مساله، اهداف و محدودیت ها تعیین، و مدلی با رویکرد برنامه ریزی آرمانی جهت طراحی بهینه سیستم های پایایی پیشنهاد گردیده است.

**واژگان کلیدی:** مدل سازی ریاضی، قابلیت اطمینان، برنامه ریزی آرمانی، پایایی

### مقدمه

در بحث قابلیت اطمینان به موضوعات مختلفی پرداخته می شود، از آن جمله می توان، بررسی توزیع های مورد استفاده در قابلیت اطمینان، برآورد قابلیت اطمینان سیستم، طراحی برای دستیابی به قابلیت اطمینان بیشتر و غیره را نام برد. در این مقاله به بررسی مدل و طراحی بهینه سیستم های پایایی پرداخته شده است.

مساله طراحی بهینه سیستم های پایایی، یکی از انواع مسائل پایایی است، که خود در انواع گوناگونی تقسیم بندی می گردد. هر سیستم شامل تعدادی زیرسیستم است، که با توجه به شکل، تعداد و خصوصیات آن ها شرایط متفاوت بوده و حالت های مختلفی را ایجاد می نماید [۲]:

- قابلیت اطمینان در سیستم های سری
- قابلیت اطمینان در سیستم های موازی
- قابلیت اطمینان در سیستم های ترکیبی (سری-موازی)

چنانچه  $R_s$  پایایی سیستم، و  $R_i$  پایایی هر یک از  $m$  جز سیستم، و اجزای سیستم مستقل از هم باشند، آنگاه در سیستم های سری خواهیم داشت:

$$R_s = \prod_{i=1}^m R_i$$

مهندسی قابلیت اطمینان (پایایی) به عنوان یک مفهوم، اواخر دهه ۱۹۴۰ و اوایل دهه ۱۹۵۰ پدیدار شد و نخستین بار در زمینه ارتباطات و حمل و نقل بکار گرفته شد. قابلیت اطمینان بدین شکل درک و تعریف می شود: اندازه گیری اینکه یک سیستم در یک دوره کاری مشخص، بدون تعمیر، تا چه حد به شکلی مناسب، هدف طراحی اش را برآورده می کند. به طور کلی، یک سیستم پایایی از چندین زیرسیستم (مرحله) تشکیل شده است، که هر زیرسیستم بیش از یک جز دارد [۱].

در این مقاله به بحث مدل سازی سیستم های پایایی پرداخته شده است.

### بیان مساله

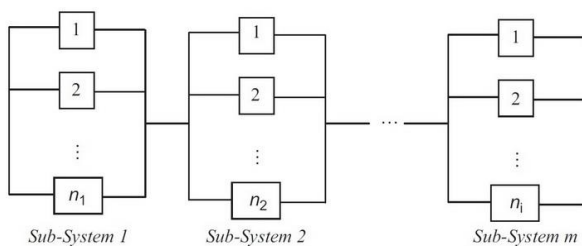
پایایی یا قابلیت اطمینان، احتمال آن است که محصول یا خدمت برای یک دوره زمانی خاص (طول عمر طرح / محصول) و تحت شرایط تعریف شده برای طرح / محصول (به عنوان نمونه: درجه حرارت، فشار، ولتاژ و غیره) به طور سالم و مناسب کار کند به بیان دیگر، پایایی را می توان کارکرد موفق سیستم در مدت و شرایط مشخص و از پیش تعیین شده دانست [۲].



## مدل ریاضی مساله

مدل های ریاضی به طور معمول دارای چهار بخش کلیدی، متغیر ها، محدودیت ها، هدف یا اهداف، و پارامترها یا داده ها هستند [۱۵].

الف) فرضیات: فرض گردیده یک سیستم از  $m$  زیرسیستم بصورت سری تشکیل شده است. اجزا در داخل هر زیرسیستم بصورت موازی قرار گرفته اند. شکل (۱) یک سیستم سری-موازی را نشان می دهد.



شکل (۱): سیستم سری - موازی [۳]

متغیر تصمیم، تعداد اجزا در هر یک از زیر سیستم ها تعریف شده است.

ب) نمادگذاری:

متغیرها و پارامترهای مدل به صورتی که در ادامه آمده است، تعریف و نمادگذاری شده اند:

$m$ : تعداد زیرسیستم ها

$r_i$ : پایایی هر جز در زیر سیستم  $i$  ام

$c_i$ : هزینه هر جز در زیر سیستم  $i$  ام

$w_i$ : وزن هر جز در زیر سیستم  $i$  ام

$v_i$ : حجم هر جز در زیر سیستم  $i$  ام

$R_s$ : پایایی کل سیستم

$C_s$ : هزینه کل سیستم

$R_a$ : پایایی موردنظر (مورد انتظار) کل سیستم

$C_a$ : هزینه مجاز کل سیستم

$W_a$ : وزن مجاز کل سیستم

$V_a$ : حجم مجاز کل سیستم

$x_i$ : تعداد اجزا در زیر سیستم  $i$  ام

پ) مدل عمومی: مدل عمومی این مساله را در چندین حالت می توان نوشت که به دو مورد آن اشاره می گردد، در حالت نخست فرض می شود که هدف بیشینه نمودن پایایی است، و

همچنین برای  $m$  جز موازی و مستقل، پایایی بصورت زیر محاسبه می گردد:

$$R_s = 1 - \prod_{i=1}^m [1 - R_i]$$

استفاده از افزونگی (Redundancy) یا عضو مازاد یکی از مهمترین ویژگی ها در دستیابی به قابلیت اطمینان در سطوح بالا است. مساله بدین شکل تعریف می گردد:

انتخاب یک طرح شدنی (امکان پذیر) از پیکربندی، که هدف آن بهینه سازی توابعی از قبیل قابلیت اطمینان، هزینه، وزن و ریسک است. این مساله تحت عنوان مساله تخصیص افزونگی یا عضو مازاد (Reliability Redundancy Allocation Problem) یا به صورت مخفف RAP نامیده می شود که نخستین بار توسط میسرا و همکارش (Misra and Ljubojevic, 1973) معرفی گردید [۳-۵]. از تحقیقات برجسته در این زمینه می توان از پژوهش های دیوید کیت (David Coit) و همکارانش نام برد [۶-۱۲].

مساله تخصیص افزونگی، از مسائل شناخته شده در ادبیات "طراحی برای پایایی" (Design-for-reliability)، است که کاربردهای گسترده ای را در دنیای حقیقی دارد، از قبیل طراحی سیستم های انرژی الکتریکی، طراحی سیستم های حمل و نقل، و طراحی سیستم های ارتباطات [۱۳]. نویسندگان در [۱۴] معتقد هستند، به طور طبیعی طراح سیستم در کوشش برای بهبود پایایی با دو مساله برخورد می کند:

الف) پیدا کردن یک تخصیص بهینه از واحدها (اجزا) بین زیر سیستم های مختلف، جهت تامین تعدادی درخواست های داده شده بر طبق چندین شاخص مشخص پایایی، به صورتی که کمترین میزان ممکن هزینه کل را ایجاد نماید.

ب) یافتن یک تخصیص بهینه از واحدها بین زیر سیستم های مختلف که شاخص پایایی را با توجه به تعدادی محدودیت مشخص، بیشینه نماید.

انتخاب محدودیت ها بستگی به ویژگی خاص مساله دارد. گاهی مساله با چندین محدودیت مختلف از جمله هزینه، حجم، وزن و غیره روبرو است [۱۴].



- متغیرهای تصمیم
- محدودیت های سیستمی
- محدودیت های آرمانی
- تابع هدف

شالوده برنامه ریزی آرمانی بر اساس سه مفهوم است [۱۹] و [۱۸]:

الف) انحراف ها: مقادیری که آرمان ها از مقدار مورد نظر خود، کمتر (یا بیشتر) تحقق یافته اند. که می تواند مطلوب یا نامطلوب باشد.

ب) اولویت ها و وزن آرمان ها: آرمان ها را در این رویکرد به سه روش می توان اولویت بندی کرد:

- ترتیبی Ordinal ranking
- اصلی Cardinal ranking
- ترکیبی از دو مورد بالا

پ) ابعاد اهداف: ابعاد یا مقیاس آرمان ها ممکن است با یکدیگر متفاوت باشد. که در این حالت بهترین روش، رتبه بندی ترتیبی خواهد بود.

### مدل آرمانی

در این بخش با توجه به موارد بیان شده و مساله مفروض، مدلی آرمانی برای مساله پیشنهاد شده است. در دنیای واقعی شرایط و محدودیت ها همیشه خشک و سخت (Rigid) نیستند به طوری که هیچ گونه انحرافی از آن ها ممکن نباشد، در موارد بسیاری به ویژه زمانی که موازنه مجاز باشد، این امکان وجود خواهد داشت. برنامه ریزی آرمانی در این خصوص انعطاف پذیر است، ضمن آنکه می توان چند آرمان تعیین و برای آن ها اولویت نیز مشخص نمود.

در اینجا فرض شده است که اولویت نخست، پایایی سیستم، و اولویت دوم، هزینه سیستم است، از همین روی، نخستین هدف در این مساله بیشینه سازی و برآوردن پایایی مورد انتظار، و هدف بعدی کمینه کردن هزینه کل، فرض گردیده است. ضمن اضافه نمودن متغیرها و پارامترهای زیر، با در نظر گرفتن مراتب پیشین، مدل پیشنهادی بصورت زیر خلاصه و ارائه گردیده است:

محدودیت ها شامل هزینه، وزن و حجم کل سیستم است، که مدل آن بصورت زیر خواهد بود:

$$MaxR_s = \prod_{i=1}^m [1 - (1 - r_i)^{x_i}]$$

s.t.

$$\sum_{i=1}^m c_i x_i \leq C_a$$

$$\sum_{i=1}^m w_i x_i \leq W_a$$

$$\sum_{i=1}^m v_i x_i \leq V_a$$

$$x_i \geq 1 \& \text{int}.$$

حالت دیگری که اشاره می شود زمانی است که هدف کمینه کردن هزینه کل سیستم است، و محدودیت ها شامل قابلیت اطمینان، وزن و حجم کل سیستم است، که مدل آن بصورت زیر خواهد بود:

$$MinC_s = \sum_{i=1}^m c_i x_i$$

s.t.

$$\prod_{i=1}^m (1 - (1 - r_i)^{x_i}) \geq R_a$$

$$\sum_{i=1}^m w_i x_i \leq W_a$$

$$\sum_{i=1}^m v_i x_i \leq V_a$$

$$x_i \geq 1 \& \text{int}.$$

### برنامه ریزی آرمانی

برنامه ریزی آرمانی نخستین بار توسط چارنس و همکاران (Charnes et al.) در سال ۱۹۵۵ استفاده شد و در سال ۱۹۶۱ با این نام توسط چارنس و کوپر (Charnes & Cooper) تعریف گردید [۱۶ و ۱۷]. برنامه ریزی آرمانی یکی از مدل های مطرح در برنامه ریزی چند هدفه است. رویکردی است که به کمک آن می توان بر دو مشکل برنامه ریزی خطی، یعنی یک هدفه بودن و محدودیت های خشک، فایق گردید.

ساختار مدل برنامه ریزی آرمانی برگرفته از چهار بخش است:

- [1] H. Pham (Ed.), "Handbook of Reliability Engineering", Springer-Verlag, New Jersey: Rutgers University, 2003.
- [2] M. B. Aryanezhad, H. Javanshir, A. Khatami F., "Reliability Engineering (Reliability Theory)", 1<sup>st</sup> ed., vol. I, Tehran: Nass, 2011, [in Persian].
- [3] K. Khalili-Damghani, M. Amiri, "Solving binary-state multi-objective reliability redundancy allocation series-parallel problem using efficient epsilon-constraint, multi-start partial bound enumeration algorithm, and DEA", *Reliability Engineering and System Safety*, vol. 103, pp. 35-44, 2012.
- [4] K. Khalili-Damghani, A. Abtahi, M. Tavana, "A new multi-objective particle swarm optimization method for solving reliability redundancy allocation problems", *Reliability Engineering and System Safety*, vol. 111, pp. 58-75, 2013.
- [5] Y. Liang, Y. Chen, "Redundancy allocation of series-parallel systems using a variable neighborhood search algorithm", *Reliability Engineering and System Safety*, vol. 92, pp. 323-331, 2007.
- [6] D. W. Coit, A. Konak, "Multiple weighted objective heuristic for the redundancy allocation problem", *IEEE Transactions on Reliability*, vol. 55, No. 3, pp. 551-558, 2006.
- [7] J. E. Ramirez-Marquez, D. W. Coit, A. Konak, "Redundancy allocation for series-parallel systems using a max-min approach", *IIE Transactions*, vol. 36, pp. 891-898, 2004.
- [8] D. W. Coit, J. Liu, "System reliability optimization with k-out-of-n subsystems", *International Journal of Reliability, Quality and Safety Engineering*, vol. 7, No. 2, pp. 129-142, 2000.
- [9] S. Kulturel-Konak, A. Smith, D. W. Coit, "Efficiently solving the redundancy allocation problem using tabu search", *IIE Transactions*, vol. 35, pp. 515-526, 2003.
- [10] D. W. Coit, "Maximization of system reliability with a choice of redundancy strategies", *IIE Transactions*, vol. 35, pp. 535-543, 2003.
- [11] D. W. Coit, A. Smith, "Reliability optimization of series-parallel systems using a genetic algorithm", *IEEE Transactions on Reliability*, vol. 45, No. 2, pp. 254-266, 1996.
- [12] H. A. Taboada, F. Baheerawala, D. W. Coit, N. Wattanapongsakorn, "Practical solutions for multi-objective optimization: An application to system reliability design problems", *Reliability Engineering and System Safety*, vol. 92, pp. 314-322, 2007.
- [13] D. Cao, A. Murat, R. B. Chinnam, "Efficient exact optimization of multi-objective redundancy allocation problems in series-parallel systems", *Reliability Engineering and System Safety*, vol. 111, pp. 154-163, 2013.
- [14] B. V. Gnedenko, I. A. Ushakov, "Probabilistic Reliability Engineering", John Wiley & Sons, Edited by J. A. Falk, George Washington University, 1995.
- [15] M. R. Mehregan, "Mathematical Modeling", 4<sup>th</sup> ed., Tehran: Tehran University & SAMT, 2012, [in Persian].
- [16] C. Romero, "A general structure of achievement function for a goal programming model", *European Journal of Operational Research*, vol. 153, pp. 675-686, Mar. 2004.
- [17] Sh. Sen, B. B. Pal, "Interval goal programming approach to multiobjective fuzzy goal programming problem with interval weights", *Procedia Technology*, vol. 10, pp. 587-595, 2013.
- [18] M. B. Aryanezhad, S. J. Sadjadi, "Operations Research II", 6<sup>th</sup> ed., Tehran: Iran University of Science & Technology, 2010, pp. 282-298, [in Persian].
- [19] M. Momeni, "New Topics in Operations Research", 5<sup>th</sup> ed., Tehran: Momeni, 2013, pp. 105-133, [in Persian].

$R_e$ : پایایی مورد انتظار برای کل سیستم

$C_e$ : هزینه موردنظر برای کل سیستم

$d_1^+, d_1^-, d_2^+, d_2^-$ : انحراف های مثبت و منفی از آرمان ها

$$\text{Min}Z = p_1 d_1^- + p_2 d_2^+$$

s.t.

$$\prod_{i=1}^m (1 - (1 - r_i)^{x_i}) - d_1^+ + d_1^- = R_a$$

$$\sum_{i=1}^m c_i x_i - d_2^+ + d_2^- = C_a$$

$$\sum_{i=1}^m w_i x_i \leq W_a$$

$$\sum_{i=1}^m v_i x_i \leq V_a$$

$$x_i \geq 1 \& \text{int.}$$

$d_1^+, d_2^+$  انحراف های بیشتر محقق یافته، و  $d_1^-, d_2^-$  انحراف های کمتر محقق یافته را بیان می کنند که هر کدام با توجه به تعریف و نوع آرمان می توانند انحراف های مطلوب، و یا انحراف های نامطلوب باشند. در مساله مفروض،  $d_1^-, d_2^+$  انحراف های نامطلوب هستند، که با توجه به اولویت های فرض شده، در تابع هدف جهت کمینه سازی منظور شده اند.

### جمع بندی

در این نوشته به موضوع پایایی پرداخته شد و به طور خاص بر روی طراحی بهینه سیستم های پایایی تمرکز گردید و مدل مساله تخصیص افزونگی یا عضو مازاد مورد بررسی قرار گرفت. سپس مدلی با رویکرد برنامه ریزی آرمانی برای مساله طراحی به منظور دستیابی به پایایی مورد نظر، پیشنهاد گردید. همان گونه که مشاهده شد، آرمان نخست بر پایه بیشینه نمودن و برآوردن قابلیت اطمینان مورد انتظار، و آرمان دوم بر پایه کمینه کردن هزینه تعیین شد. مدل شامل پنج محدودیت است، که دو محدودیت ابتدایی (محدودیت پایایی و هزینه)، محدودیت های آرمانی مدل، و سه محدودیت بعدی (محدودیت وزن، حجم و حداقل تعداد زیرسیستم)، محدودیت های سیستمی مدل هستند.

### مراجع



# Solving Three-player strategic games by Lemke-Howson Algorithm using coalative games

Sh.jafari\*, Ph. D. student of Department of Mathematics,

Shahed University, shahla.jafari83@yahoo.com

H.Navidi, Associate professor of Department of Mathematics.

Shahed University, navidi@shahed.ac.ir

**Abstract:** The Lemke-Howson algorithm is an effective method to find at list one Nash Equilibrium for a two-player bimatrix game. Here we want to use Lemke-Howson algorithm to find Nash Equilibrium of Three-player strategic games. First we change Three-player stratgic game into two-player bimatrix game, then solve it by the L-H algorithm and perform the program at matlab programming space.

**Keywords:** Equilibrium, Coalotion, Cooperative game, Strategic game.

## 1 INTRODUCTION

A strategic game consists of: a finit set  $N$  (th set of player), for each player  $i \in N$  a nonempty set  $A_i$  (th set of actions available to player  $i$ ), for each player  $i \in N$  a preference relation on  $A = \times_{j \in N} A_j$  (the prference relation of player  $i$ . [2]-[3].

Cooperative games are the games in which players can cooperate and work in coalations. Performing in coalations make better payoffs for the persons who work in coalation. A coalation game with transferabe payoff consists of a function  $v$  that associates with every nonempty subset  $S$  of  $N$  (a coalation) a real number  $v(S)$  (the worth of  $S$ ). For each coaltion  $S$  the number  $v(S)$  is the total payoff that is available for division among the members of  $S$ .

Bimatrix game is a game in which there are two matrices that show th payoffs associated with each player. For example in a bimatrix game we have matrices  $A$  and  $B$ . Each row  $i$  of matrix  $A$  is asso-

ciated with strategy  $i$  of player 1 and eache colomn  $j$  is associated with strategy  $j$  of player 2 and is vice versa for matrix  $B$ .

## 2 Lemke-Howson algorithm

Input: Nondegenerate bimatrix game with matrices  $A_{m \times n}$  and  $B_{m \times n}$  and an number  $k \in \{1, \dots, m+n\}$ . Output: One Nash equilibrium of the game. Method: Call  $k$  missing number. Let  $(x, y) = (0, 0) \in P \times Q$ . Drop lable  $k$  (from  $x$  in  $P$  if  $k \in M$ , from  $y$  in  $Q$  if  $k \in N$ ). That  $M = \{1, 2, \dots, m\}$  and  $N = \{m+1, \dots, m+n\}$  and  $P = \{x \in R^m | x \geq 0, B^t x \leq 1\}$  and  $Q = \{y \in R^n | Ay \leq 1, y \geq 0\}$ . Loop: Call the new vertex pair  $(x, y)$ . Let  $l$  be the lable that is picked up. If  $l = k$ , terminate with nash equilibrium  $(x, y)$ (rescaled as mixed strategy pair). Otherwise, drup  $l$  in the other polytope and repeat[1].

\*Corresponding Author



### 3 Change three-player strategic game to two-player bimatrix game

Suppose that we have a three-player game. At first we select two players  $i$  and  $j$  that can be in a coalition. Now we can build matrices  $A$  and  $B$ .  $A$  for player  $k$  and  $B$  for the coalition.  $A$  is payoff matrix for player 1 and  $B$  represents payoff matrix for the coalition which is obtained by adding payoffs of players  $i$  and  $j$  at each pair of strategies. Now we have bimatrix game and can solve it by Lemke-Howson algorithm. Recall that we have 3 choices to perform an coalition. We check all of them and consider the accomplishment of each choice and their Nash equilibriums. For example suppose that we have the following game:  
 $N = \{1, 2, 3\}$  and  $S^1 = S^2 = S^3 = \{a, b\}$

player 3 choose strategy a:

1/2	a	b
a	$c_{1a}, c_{2a}, c_{3a}$	$c_{1a}, c_{2b}, c_{3a}$
b	$c_{1b}, c_{2a}, c_{3a}$	$c_{1b}, c_{2b}, c_{3a}$

player 3 choose strategy b:

1/2	a	b
a	$d_{1a}, d_{2a}, d_{3b}$	$d_{1a}, d_{2b}, d_{3b}$
b	$d_{1b}, d_{2a}, d_{3b}$	$d_{1b}, d_{2b}, d_{3b}$

Half of table:

$2/\{1,3\}$	(a,a)	(a,b)
a	$c_{2a}, c_{1a} + c_{3a}$	$d_{2a}, d_{1a} + d_{3b}$
b	$c_{2b}, c_{1a} + c_{3a}$	$d_{2a}, d_{1a} + d_{3b}$

Half of table:

$2/\{1,3\}$	(b,a)	(b,b)
a	$c_{2a}, c_{1b} + c_{3a}$	$d_{2a}, d_{1b} + d_{3b}$
b	$c_{2a}, c_{1b} + c_{3a}$	$d_{2b}, d_{1b} + d_{3b}$

We have two matrices  $A$  and  $B$  that  $A$  is payoff matrix of coalition  $\{1, 3\}$  and  $B$  is payoff matrix of player 2.

$$A = \begin{bmatrix} c_{1a} + c_{3a} & d_{1a} + d_{3b} & c_{1b} + c_{3a} & d_{1b} + d_{3b} \\ c_{1a} + c_{3a} & d_{1a} + d_{3b} & c_{1b} + c_{3a} & d_{1b} + d_{3b} \\ c_{1a} + c_{3a} & d_{1a} + d_{3b} & c_{1b} + c_{3a} & d_{1b} + d_{3b} \end{bmatrix}$$

and:

$$B = \begin{bmatrix} c_{2a} & d_{2a} & c_{2a} & d_{2a} \\ c_{2b} & d_{2a} & c_{2a} & d_{2b} \end{bmatrix}$$

### 4 conclusion

We can conclude that n-player games can be reduced into 2-player games and solve them by Lemke-Howson algorithm. The main idea is to change Lemke Howson algorithm in order to solve n-player games directly instead of changing the model of game.

### References

- [1] C. Lemke, J. Howson, "Equilibrium points of bimatrix games," Journal of the Society for Industrial Applied Mathematics, vol. 12, no. 2, pp. 413-423, 1964.
- [2] N. Nisan, T. Roughgarden, E. Tardos, Vijay V. Vazirani, "Algorithmic Game Theory," Cambridge University Press, 2007.
- [3] M. J. Osborne, A. Rubinstein, "A Course in Game Theory," The MIT Press Cambridge, Massachusetts London, England.



# Global polynomial optimization via Groebner basas

**H. Harfsheno\***, Ph. D. student of School of Mathematics,  
Damghan University, h.harfsheno@std.du.ac.ir

**H. Nosratipour**, Ph. D. student of School of Mathematics,  
Damghan University, h.nosratipour@std.du.ac.ir

**A. H. Borzabadi**, Academic member of School of Mathematics,  
Damghan University, borzabadi@du.ac.ir

**S. Rahmani**, Academic member of School of Mathematics,  
Damghan University, s-rahmani@du.ac.ir

**A. Basiri**, Academic member of School of Mathematics,  
Damghan University, basiri@du.ac.ir

---

**Abstract:** Finding the global optimal solution for a general nonlinear optimization problems is a difficult task except for very small problems. In this paper we identify a class of nonlinear optimization problems called polynomial optimization problems(PO). A polynomial optimization is an optimization problem with a scalar polynomial objective function and a set of polynomial constraints. we employ the technique of Groebner basis (GB) as a useful method for finding optimal solutions in PO problems. To apply GB theory, we need to consider the Lagrangian problem associated with the original PO and extract the system of nonlinear equations associated with the first-order Karush-Kuhn-Tucker (KKT). By using Groebner Bases, we can determine the global minimum of a polynomial program in a reasonable amount of time and memory.

---

## 1 INTRODUCTION

Consider the following global (nonlinear) optimization problems (CGOP for short)

$$\begin{aligned} \text{Global min} \quad & f(x) \\ \text{Subject to} \quad & c_i(x) = 0 \quad i = 1, \dots, m \end{aligned} \quad (1)$$

where  $f : R^n \rightarrow R$  and  $c_i : R^n \rightarrow R$  are once continuously differentiable functions.  $n$  is the number of variables.

Problems of global optimization naturally arise in many applications, e.g. in the advanced engineering design, data analysis, financial planning, risk

management, scientific modelling, etc. Most cases of practical interest are characterized by multiple local optima and, therefore, in order to find a globally optimal solution, a global scope search effort is needed. Generally speaking there are two types of methods for tackling CGOP problem (1) (for a general survey see [1]-[2]):

- (i) *The exact methods* include complete enumerative search strategies (applicable to certain well-structured problems of type (1), such as the concave programming), homotopy methods and related approaches, successive ap-

---

\*Corresponding Author



proximation methods (applicable again to certain structured global optimization problems), branch and bound algorithms (applicable to broad classes of problem (1), such as the concave programming, D.C. programming, Lipschitz optimization, etc.), and others.

- (ii) *The heuristic methods* do not offer a guarantee of locating the global optimum, but give satisfactory results for much larger range of global optimization problems. Recently, so-called *metaheuristics*, or frameworks for building heuristics (originally developed for solving combinatorial optimization problems) became popular for solving **GOP** as well. Let us mention some of them. Some of the best known metaheuristic approaches use different techniques in order to avoid entrapments in pour local minima. The methods of this type are the simulated annealing, genetic algorithms, tabu search, variable neighborhood search, etc.

A general nonlinear program is often too complex for us to find its global solution. In this paper, we propose a class of nonlinear optimization problems called polynomial optimization (PO) problems. A polynomial optimization is a mathematical optimization with a polynomial scalar objective function constrained by a polynomial system of equations. Polynomial programs specialize to linear programs if both the objective and constraint set are linear, and specialize to quadratic programs if the objective is a second-degree polynomial and the constraint set is linear.

A polynomial program consists of a polynomial objective function and a set of polynomial constraint equations. In general, it is not a convex problem due to the nonlinear terms that may arise in the objective and/or constraints. In this paper, we assume that a PO problem is expressed in the following

form.

$$\begin{aligned} \text{Global min} \quad & f(x) \\ \text{Subject to} \quad & P(x) = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

where  $f(\cdot)$  is a scalar function, and  $P(x)$  is a system of  $m$  polynomial equations.

PO have a wide spectrum of applications. Many examples can be found in [1], [2]. A typical chemical equilibrium system can be modeled by ten to twenty equations in ten to twenty unknowns. In robotics, a six-joint robot can involve a polynomial program with eighteen equations in twelve unknowns.

In this paper, we propose a systematic procedure for determining global optimal solutions for PO. Without loss of generality, we assume that minimal solutions are to be found. We first transform a polynomial optimization into a Lagrangian problem. Based on the notion of Groebner basis, we then reduce the Lagrangian problem to a canonical form by symbolic substitution and simplification. Finally, we use numerical back substitution to locate all extreme solutions in the reduced Lagrangian problem. The idea in this algorithm is to preserve all the extrema by maintaining the algebraic structure of these extrema while performing symbolic reduction. To ensure that a global solution can be obtained, the numerical isolation of global optimal solution is delayed until the mathematical form becomes robust enough to tolerate numerical errors.

## 2 Global Optimization

In this section we introduce the notion of Groebner basis as a useful method for finding optimal solutions in polynomial programming. To apply Groebner basis theory, we need to consider the Lagrangian (KKT) problem associated with the original polynomial program (2). The Lagrangian for a polynomial program is defined as follows.

$$L(x, \lambda) = f(x) - \lambda^T P(x) \quad (3)$$



where  $\lambda$  is the vector of Lagrange multipliers. Differentiating this expression with respect to  $x$  and  $\lambda$ , we obtain the corresponding Lagrangian Problem that finds  $x$  and  $\lambda$  such that

$$\nabla L(x, \lambda) = 0 \quad (4)$$

The Lagrangian problem gives the first-order necessary condition for optimality. All the global and local extrema for the original optimization problems are solutions to the Lagrangian problem. Hence, if one can solve the Lagrangian problem and obtain all its solutions, then obtaining the global minimum becomes a more manageable task.

The Lagrangian problem associated with a PO consists of a system of polynomial equations. More often than not, the polynomial system is strongly coupled in the sense that any solution to the entire system cannot start with a single equation followed by back substitution to the others. We need a systematic procedure to simplify the polynomial system so that after simplification we can obtain the roots without much difficulty. We know that Gaussian elimination serves this purpose for a linear system. Buchberger carried this procedure one step further to extend Gaussian elimination to polynomial systems [3].

## 2.1 Groebner basis

A Groebner basis for a polynomial system is a canonical form that represents the original system. It can be shown that a Groebner basis contains the same information as the original set of polynomials, although it may contain more polynomials than the original set. However, through decoupling procedures, Groebner basis reduces the original problem to a form that allows us to solve the reduced set of equations by back substitution, which is extremely difficult to do in the original problem. The following Theorems shows the main properties of Groebner Bases.

**Theorem 2.1** (Buchbergers Criterion). *Let  $I$  be a polynomial ideal. Then a basis  $G = \{g_1, \dots, g_t\}$  for  $I$*

*is a Groebner basis for  $I$  if and only if for all pairs  $i \neq j$ , the remainder on division of  $S(g_i, g_j)$  by  $G$  is zero.*

**Theorem 2.2.** *Let  $l$  be a zero-dimensional ideal and  $G$  be the reduced Groebner basis for  $l$  with respect to the lex term order with  $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ . Then we can order  $g_1, \dots, g_n$  such that  $g_1$  contains only the variable  $x_1$ ,  $g_2$  contains only the variables  $x_1$  and  $x_2$  and so forth until  $g_n$ .*

## 2.2 Global Optimization

Global Optimization of Polynomial Programs. Based on Groebner bases, a global optimization algorithm can be readily constructed as follows.

1. Generate  $L(x, \lambda)$ .
2.  $L(x, \lambda) = 0$  using symbolic differentiation to obtain the Lagrangian formulation.
3. Apply Buchberger's Algorithm to  $L(x, \lambda) = 0$ .
4. Back-substitute by using a numerical root finder.
5. Compute  $f(x)$  for each set of roots.
6. Sort the values of  $f(x)$  obtained in increasing order.
7. Check the second-order necessary condition until the first minimum is found.

The first three steps need to be carried out by symbolic computation so that the algebraic structure of the optimization problem is maintained in spite of the transformations and reductions made. The resulting Groebner basis is much easier to solve than  $\nabla L(x, \lambda) = 0$  because of the minimal degree of coupling achieved. In essence, Groebner basis reduction produces a triangular form of the system in which the last equation can be "trivially" solved, and the remainder of the triangular system, iteratively processed by "back-substitution." Since the optimality of Lagrangian problems is based on first-order differential equations, the resulting solution may contain a mix of minima and maxima, and



the second-order differential of the Lagrangian condition has to be checked to ensure that the final extremum obtained is indeed a minimum.

### 3 Numerical Experiment

In this section, we demonstrate the ability of the optimization algorithm presented in the last section to find global optima for general polynomial optimization.

$$\begin{aligned} \text{Minimize} \quad & f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2^2 x_3 \\ \text{Subject to:} \quad & -6 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0 \\ & x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{aligned}$$

Since there are two equality constraints, two Lagrange multipliers,  $\lambda_1$  and  $\lambda_2$ , are introduced to formulate the Lagrangian problem. To locate all the extrema, the resulting Lagrangian problem will involve solving a system of polynomial equations,  $\nabla L(x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \lambda_2) = 0$  or explicitly expressed as

$$\begin{aligned} \lambda_2 + 2\lambda_1 x_1 + x_2^2 x_3 &= 0 \\ \lambda_2 + 2\lambda_1 x_2 + 2x_1 x_2 x_3 &= 0 \\ -\lambda_2 + x_1 x_2^2 + 2\lambda_1 x_3 &= 0 \\ -6 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 &= 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

We use Maple software in order to apply Groebner basis method to solve this system. We obtain

$$\begin{aligned} [x_3^6 - 8x_3^4 + 19x_3^2 - 12, -x_3^5 + 2x_2x_3^2 + 4x_3^3 - 2x_2 \\ - 3x_3, x_2^2 - x_2x_3 + x_3^2 - 3, x_1 + x_2 - x_3, \\ \lambda_2 + x_2, x_3^4 - x_2x_3 - 4x_3^2 + 2\lambda_1 + 3] \end{aligned}$$

Now one can solve equation with only one variable  $x_3$  and second equation with two variable and so on. Thus we have  $1, -1, \sqrt{3}, -\sqrt{3}, 2, -2$  as a solution for  $x_3$ . After a sequence of numerical computations as specified in the global optimization procedure, we obtain six solutions

to the Lagrangian problem that evaluate  $f$  to  $\{-4.0, -4.0, 0, 0, 2.25, 2.25, 2.25, 2.25\}$ . The minimum of  $f$  is simply  $-4$  with  $(x_1, x_2, x_3)$  equal to  $(-1, 2, 1)$  or  $(1, -2, -1)$ .

### 4 Conclusion

In this paper, we have identified a class of nonlinear constrained optimization problems called polynomial programming problems. This class of problems can be used to model many real-world applications as well as theoretically interesting problems. Based on Lagrange formulations, we propose a deterministic global optimization procedure for finding optimal solutions of a polynomial program. Our algorithm employs both symbolic and numeric computations; the symbolic part concerns the generation of Groebner bases as a canonical form for Lagrange formulations. We find that Groebner Bases can remove as much coupling as possible in the Lagrange formulations, resulting a triangular system of equations that can be solved by numerical back substitution. Finally, we illustrate our algorithm on an interesting example problem.

### 5 Reference

#### References

- [1] P.M. Pardalos and H.E. Romejin "Handbook of Global Optimization", . Kluwer, Dordrecht, 2002.
- [2] P.M. Pardalos and J.B. Rosen "Constrained Global Optimization: Algorithms and Applications", Springer, Berlin, 1987.
- [3] B.Buchberger, , "A note on the complexity of construction groebner-base," in Lecture Notes in Computer Science,, pp. 137-145, Springer-Verlag,1983.





# Infeasible path following algorithm for linear fractional programming

Seyed Saeed Nabavi , PhD student,

Semnan University, saeednabavi86@gmail.com

Mohammad Reza Safi, Academic member of School of Mathematics,

Semnan University, safi\_mohammadreza@yahoo.com

Seyed Mojtaba Ghasemi , PhD student,

Semnan University, ghasemi59@gmail.com

**Abstract:** Infeasible path following algorithm is one of the best algorithm for solving semidefinite programming (semidefinite programming include linear programming, quadratic programming, second cone programming and etc.). infeasible path following algorithm is a interior point method but the sequence of answer is not feasible but this sequence convergence to a (optimal point) feasible point. We know linear fractional programming can be converted to linear programming. In this paper we convert a linear fractional programming to linear programming and then use infeasible path following algorithm for solving linear programming.

**Keywords:** Infeasible path following algorithm, linear fractional programming.

## 1 Introduction

Linear fractional programming is a optimization problem such that objective function is fractional that numerator and denominator are linear functions and the constraint of problems are linear so

$$\begin{aligned} \min \quad & \frac{c^T x + c_0}{d^T x + d_0} \\ & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned} \quad (LFP)$$

It is easily to show a linear fractional programming is not convex but is quasi-concave. The below assumption is necessary.

**Assumption 1.1.** For all feasible points (LFP)  $d^T x + d_0 > 0$ .

If for all feasible point  $d^T x + d_0 < 0$  we can consider  $\frac{-c^T x - c_0}{-d^T x - d_0}$ . There are several equivalent form. one of them is

$$\begin{aligned} \min \quad & \alpha \\ & c^T x + c_0 \leq \alpha(d^T x + d_0) \\ & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

This problem is nonlinear programming but by set  $\alpha$  and seeking for feasible solution we have a approximate of optimal value and then update  $\alpha$ , so we have sequence of linear programming.



Anothe one is

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T y + t c_0 \\ & d^T y + d_0 t = 1 \\ & Ay = bt \\ & y, t \geq 0 \end{aligned}$$

**Theorem 1.2.** *If  $(y, t)$  be a optimal point we have  $t > 0$  and  $x = y/t$  is a feasible point and opimal point.*

**Theorem 1.3.** *Consider below primal and dual program*

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \quad (LP) \\ & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max \quad & b^T y \quad (DLP) \\ & A^T y + s = c \\ & s \geq 0 \end{aligned}$$

If  $x^*$  be a optimal point for (LP) and  $(y^*, s^*)$  be a optimal point for (DLP) we have  $x_i s_i = 0$ .

## 2 Interior point method

### 2.1 Simple method

**Definition 2.1.** (Slater's condition) We say LP have slater's condition iff there exist  $x$  such that  $Ax = b, x > 0$  and there exist a point  $(y, s)$  such that  $A^T y + s = c, s > 0$ .

This condition is base of majority of inite-rior point method for solving convex programming. suppose  $x^0, s^0 > 0$  and  $y^0$  arbitrary (not necessary feasible point) we are seeking for a  $(\Delta x, \Delta y, \Delta s)$  such that  $A(x + \Delta x) = b$ ,  $A^T(y + \Delta y) + (s + \Delta s) = c$  and  $x + \Delta x, s + \Delta s \geq 0$ . We can first solve

$$\begin{aligned} A(x + \Delta x) &= b \\ A^T(y + \Delta y) + (s + \Delta s) &= c \end{aligned}$$

For solve this problem, all of the equations are linear but  $\Delta y \Delta s$ . Since  $\Delta y$  and  $\Delta s$  is small first we solve this problem with assumption  $\Delta y \Delta s = 0$  and replace  $\Delta y$  and  $\Delta s$  in equation and solve it. We find better approximation of  $\Delta x, \Delta y$  and  $\Delta s$ . Then find the largest  $\alpha$  such that

$$\begin{aligned} x + \alpha \Delta x &> 0 \\ s + \alpha \Delta s &> 0 \end{aligned}$$

And then update  $x, y$  and  $s$

$$\begin{aligned} x &= x + \alpha \Delta x \\ y &= y + \alpha \Delta y \\ s &= s + \alpha \Delta s. \end{aligned}$$

### 2.2 Centerd interior point algorithm

**Theorem 2.2.** *If LP has slater's condition then for all  $\mu > 0$  there exist unigue  $(x, y, s)$  such that*

$$\begin{aligned} Ax &= b, x \geq 0 \\ A^T y + s &= c, s \geq 0 \\ x_i s_i &= \mu. \end{aligned}$$

$(x, y, s)$  is called  $\mu$ -center. for solve linear programming similary last section we chose  $(x, y, s)$ , set  $\mu = x^T s / n$  ( $n$  =dimention of  $x$ ) then find  $(\Delta x, \Delta y, \Delta s)$  then find  $\alpha$  and continue. it can be proved sequence of  $\mu \rightarrow 0$  and sequence of  $(x, y, s)$  convergence to optimal point.

## 3 Linear fractional programming and infeasible path following algorithm

Consider

$$\begin{aligned} \min \quad & \alpha \\ & c^T x + c_0 \leq \alpha(d^T x + d_0) \\ & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$



We can find a feasible point with zero objective function by infeasible path following algorithm, suppose that  $x_0$  be a feasible point for linear fractional programming and set  $\alpha = \frac{c^T x_0 + c_0}{d^T x_0 + d_0}$ . Of course we can do only several iterative of infeasible path following algorithm and find a point  $x_0$  such that may be not feasible and set  $\alpha = \frac{c^T x_0 + c_0}{d^T x_0 + d_0}$ . We should do this process for dual program and find  $(y_0, s_0)$ . Note that this process can help us to accelerate to get optimal solution. Note that  $(x_0, y_0, s_0)$  is not feasible for main problem and if  $(x_0, y_0, s_0)$  is feasible for main problem this is a solution for main problem. Now we can start main iteration and find  $(\Delta x, \Delta y, \Delta s)$  and update  $(x, y, s)$ . Also we can do similar process for below linear programming for solve linear fractional programming

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T y + tc_0 \\ & d^T y + d_0 t = 1 \\ & Ay = bt \\ & y, t \geq 0 \end{aligned}$$

And then set  $x = y/t$ .

**Remark 3.1.** *We can solve linear fractional programming with standard problem and own dual by infeasible path following algorithm but translate into linear programming and useing own dual is proposed.*

**Remark 3.2.** *Having slater's condition is necessary but is not sufficient and it can bring a example to show this.*

## 4 Example

Consider The following LFP problem

$$\begin{aligned} \min \quad & \frac{x_2 + 1}{x_1 + 3} \\ & -x_1 + x_2 \leq 1 \\ & -x_2 \leq 2 \\ & x_1 + 2x_2 \leq 7 \\ & x_1 \leq 5 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

We start by  $x_0 = (1, 1)$  after three steps we have  $x = (1, 2)$  that is optimal point.

## References

- [1] G.R. Bitran and A.G. Novaes, "Linear programming with a fractional function", Operations Research 2229, 1973.
- [2] E.B. Bajalinove, "Linear Fractional Programming: Theory, Methods", Applications and Software, Kluwer Academic Publishers, 2003.
- [3] E.B. Bajalinove and A. "Tangian, Adjusting an objective function to a given optimal solution in linear and linear fractional programming", in: A. Tangian, J. Gruber (Eds.), Constructing and Applying Objective Functions, in: Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, vol. 510, Springer, 2001.
- [4] A. Charnes, W.W. Cooper, "Programs with linear fractional functions", Naval Research Logistics Quarterly 9 (1962) 181196.
- [5] D.M. Greig, "Optimization, Longman, London", New York, 1980.
- [6] S. Schaible, "Duality in fractional programming: A unified approach", Operations Research 24 (1976) 452461.
- [7] S. Singh, "Optimal conditions in fractional programming", Journal of Optimization Theory and Applications 33 (1981) 287294.
- [8] D.A. Bayer and J.C. Lagarias, "The nonlinear geometry of linear programming," manuscripts, ATT Bell Laboratories (Murray Hill, N J, 1986), to appear in Transactions of the American Mathematical Society.
- [9] A. Fiacco and G. McCormick, Nonlinear Programming: Sequential Unconstrained Minimization Techniques (John Wiley and Sons, New York, 1968).

# Removing big M Problem in Linear Programming

Seyed Saeed Nabavi, Ph. D Student,

Semnan University, saeednabavi86@gmail.com

Mohammad Javad Latifi, Masters' in Mathematics,

Iran University of Science and Technology, jlatifi86@gmail.com

**Abstract:** In big M methods we use a big number instead of M. This is a big problem in computer computation. In this paper we have proposed a method for computer computation. We use a pair number instead of a big number and explain how to use this in own computation. This method could be used in every big M method, not necessary for finding feasible basis in linear programming such that linear fractional programming and problem with absolute value condition and etc.. It should be noted The proposed method does not increase number of computation.

**Keywords:** Linear Programming, Big M Method, Linear Fractional Programming, Feasible Base, Absolute value Problem.

## 1 Introduction

Consider following linear programming

$$\begin{aligned} \min \quad & cx \\ \text{s.t.} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned} \quad (1)$$

Without lose of generally we suppose  $b \geq 0$ . For finding feasible base we consist following problem which it is known big M problem

$$\begin{aligned} \min \quad & cx + Mx_0 \\ \text{s.t.} \quad & Ax + Ix_0 = b \\ & x, x_0 \geq 0 \end{aligned} \quad (2)$$

where M is a big number. At first the matrix  $[AI]$  is full rank so it is a Advantage of last problem and always has a solution  $x = 0, x_0 = b$ . There are some theorems about last problem but following theorem is a important of all.

**Theorem 1.1.** • If problem 1 has no solution then optimal value of problem 2 is  $+\infty$ .

- If problem 1 has a bounded solution then problem 2 has bounded optimal value with  $x_0 = 0$ .

Last theorem says solve problem 2 equal with solve problem 1 but important difficulty in using big M is Calculation error because sum of a small number and a big number is big number and effect of a small number is lost. In additional divide to big number is zero and the others problem in computer computational.

One of others problem that used big M is following problem. Consider following problem

$$\begin{aligned} \min \quad & cx \\ \text{s.t.} \quad & Ax = b \\ & |qx + r| \geq s \\ & x \geq 0 \end{aligned} \quad (3)$$





Problem 3 could be translated to following problem

$$\begin{aligned}
 \min \quad & cx \\
 \text{s.t.} \quad & Ax = b \\
 & qx + r \geq s - Mt \\
 & qx + r \leq -s + M(1 - t) \\
 & x \geq 0, t \in \{0, 1\}
 \end{aligned} \tag{4}$$

Problem 3 and problem 4 are equivalent.

## 2 Proposed Method for removing The problem

We propose to use the pair of number  $[a, b]$  instead of  $a + bM$  number and define  $[a_1, b_1] + [a_2, b_2] = [a_1 + a_2, b_1 + b_2]$  and the others similarly.

Note that we don't use a very big number but also we use a ordered pair and in computer computational has not effect.

### 2.1 Compare two number

Suppose we have two numbers, one of them is  $c_1 = a_1 + b_1M$  and the other one  $c_2 = a_2 + b_2M$ . Compare of  $c_1$  and  $c_2$  is easy, because  $c_1$  and  $c_2$  are two real numbers. Now we would like to compare  $d_1 = [a_1, b_1]$  and  $d_2 = [a_2, b_2]$ . At first we compare  $b_1$  and  $b_2$  if  $b_1 > b_2$  then  $d_1 > d_2$  else if  $b_2 > b_1$  then  $d_2 > d_1$  but if  $b_1 = b_2$  then compare  $a_1$  and  $a_2$  if  $a_1 > a_2$  then  $d_1 > d_2$  and if  $a_2 > a_1$  then  $d_2 > d_1$  and if  $a_1 = a_2, b_1 = b_2$  then  $d_1 = d_2$ .

**Remark 2.1.** *If we have division we can bring similarly comparison between two numbers.*

### 2.2 Linear Programming

In linear programming we consider two rows for objective function which one is a row corresponded to big M coefficient and the other row is ordinary number and in every iterative we do everything do in objective function in ordinary simplex method with this difference that do in two rows.

**Remark 2.2.** *The number of computer computational does not increase too much.*

## 3 Example

Consider following example of linear programming

$$\begin{aligned}
 \min \quad & -x_1 - x_2 \\
 \text{s.t.} \quad & x_1 - x_2 - x_3 = 1 \\
 & -x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 1 \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0
 \end{aligned}$$

We add  $x_5$  and  $x_6$  and draw the simplex table

1	1	0	0	-M	-M	0
1	-1	-1	0	1	0	1
-1	1	2	-1	0	1	1

Now we consider new table and we continue

0	0	0	0	-1	-1	2
1	1	0	0	0	0	0
1	-1	-1	0	1	0	1
-1	1	2	-1	0	1	1

$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$
1	1	0	0	0	0	0
$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$
$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

0	0	0	0	-1	-1	0
0	2	0	1	-2	-1	-3
1	-1	0	-1	2	1	3
0	0	1	-1	1	1	2

This computation have no error in its computation.

## References

- [1] M.S. Bazaraa, J.J. Jarvis, H.D. Sherali, "Linear Programming and Network Flows", John Wiley Sons, 1990.



- [2] G.B. Dantzig, "Programming in a linear structure. Comptroller", United Air Force, Washington, D.C., February, 1948.
- [3] G.B. Dantzig, Maximization of a linear function of variables subject to linear inequalities, in: T.C. Koopmans (Ed.), Activity Analysis of Production and Allocation, John Wiley Sons, New York, 1951, pp. 339347.
- [4] V. Klee, A class of linear programming problems requiring a large number of iterations, Numerische Mathematik 7 (1965) 313321.
- [5] V. Klee, G.J. Minty, How good is the simplex algorithm? in: O. Shisha (Ed.), Inequalities III, Academic, New York, 1972, pp. 159 175.
- [6] I.G. Maros, A general phase-I method in linear programming, European Journal of Operational Research 23 (1986) 6477.
- [7] K.G. Murty, Linear Programming, John Wiley Sons, 1983.



## Optimal Control of Singular System via Orthogonal Function

R. Ebrahimi<sup>1</sup>,

<sup>1</sup> Sama technical and vocational training college, Islamic Azad University, Quchan Branch, Quchan, Iran

### Abstract

A new method for finding the optimal control of linear time invariant singular systems with a quadratic cost functional using Fourier series is proposed. Properties of Fourier series are first briefly presented and the operational matrix for integration is utilized to reduce the dynamical equations to a set of simultaneous linear algebraic equations.

**Keywords:** Optimal control; singular systems; Fourier series; operational matrix

### 1. Introduction

For the last four decades, the orthogonal functions approach has extensively used in obtaining approximate solutions of problems described by differential equations such as analysis of linear time invariant, time varying systems, modal reduction, optimal control and system identification [1,2]. The main idea of this technique is that it reduces these problems to those of solving a system of algebraic equations and thus it greatly simplifies the problem. The approach is based on converting the differential equations into a set of algebraic equations. The state and/or control involved in the equation are approximated by finite terms of the orthogonal series and using an operation matrix of integration the integral will be eliminated. The form of the operational matrix of integration depends on the particular choice of the orthogonal functions like Walsh function, block-pulse functions, Laguerre series, Jacobi series, Fourier series [3, 4], Bessel series, Taylor series, shifted Legendre, Chebyshev polynomials, and Hermite polynomials. In this study, we use Fourier series to approximation both the control and state functions. It offers a different approach from the standard variational method [5,6,7,8] and has the advantage of being computationally attractive. It avoids having the integral equations, created from variational methods by reducing the problem to the solution of an algebraic system of equations, thus providing a computationally more efficient approach.

In addition, solving a system of coupled initial-boundary-value problems, a requirement with the maximum principle, is avoided. In this paper, Fourier series is employed to solve the optimal control of linear singular systems.

The main feature of optimal control problems is to minimize a given performance index in a given period of time with the minimum expenditure of force. The Fourier series integral operational matrix is utilized to approximate the state variable and each component of the control. The parameterization approach uses a finite-term Fourier series with unknown coefficient, which will be optimally found. By this, the quadratic optimization problem is transformed into a mathematical programming problem with objective of minimizing the unknown coefficients to give suboptimal solution to the problem. A necessary condition for optimality of the unknown coefficients is derived as a system of linear algebraic equations, and the solutions are used to obtain the optimal trajectory of the system.

### 2. Preliminaries and Problem Statement

#### 2.1 Properties of the Fourier series

Suppose a signal  $g(t)$  has finite energy over the interval  $[0, L]$ . Then  $g(t)$  can be represented by a Fourier series as follows

$$g(t) = g_0 + \sum_{n=1}^{\infty} g_n \cos\left(\frac{2n\pi t}{L}\right) + g_n^* \sin\left(\frac{2n\pi t}{L}\right) \quad (1)$$

Where the Fourier coefficients  $g_n, g_n^*$  are given by

$$g_0 = \frac{1}{L} \int_0^L g(t) dt \quad (2a)$$

\*Corresponding author: [elec-gp@quchan-samacollege.ir](mailto:elec-gp@quchan-samacollege.ir)  
[Ebrahimi\\_123ali@yahoo.com](mailto:Ebrahimi_123ali@yahoo.com)

$$g_n = \frac{2}{L} \int_0^L g(t) \cos \frac{2nft}{L} dt, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2b)$$

$$g_n^* = \frac{2}{L} \int_0^L g(t) \sin \frac{2nft}{L} dt, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2c)$$

We assume that the derivative of  $g(t)$  in equation (1) is described by

$$f(t) = \dot{g}(t) = f_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ f_n \cos\left(\frac{2nft}{L}\right) + f_n^* \sin\left(\frac{2nft}{L}\right) \right\} \quad (3)$$

An approximation to  $f(t)$  and  $g(t)$  are obtained by keeping those terms in (1) and (3) for which  $1 \leq n \leq r$  and discarding others.

This may be written in a compact form as

$$g(t) = g_0 w_0(t) + \sum_{n=1}^r \{ g_n w_n(t) + g_n^* w_n^*(t) \} = G^T \Phi(t) \quad (4)$$

$$f(t) = f_0 w_0(t) + \sum_{n=1}^r \{ f_n w_n(t) + f_n^* w_n^*(t) \} = F^T \Phi(t) \quad (5)$$

Where

$$G = [g_0 \quad g_1 \quad g_2 \quad \dots \quad g_r \quad g_1^* \quad g_2^* \quad \dots \quad g_r^*]^T$$

$$F = [f_0 \quad f_1 \quad f_2 \quad \dots \quad f_r \quad f_1^* \quad f_2^* \quad \dots \quad f_r^*]^T \quad (6)$$

$$\Phi(t) = [w_0 \quad w_1 \quad w_2 \quad \dots \quad w_r \quad w_1^* \quad w_2^* \quad \dots \quad w_r^*]^T$$

With

$$w_n = \cos \frac{2nft}{L}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

$$w_n^* = \sin \frac{2nft}{L}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

The elements of  $w(t)$  are orthogonal in the

$$\text{Interval } t \in (0, L). \quad \text{i.e.} \quad \int_0^L w_n w_m(t) dt = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ \frac{L}{2} & n = m \end{cases}$$

The integration of vector  $\Phi(t)$  defined in equation (6) can be approximation by

$$\int_0^t \Phi(t') dt' = P \Phi(t) \quad (7)$$

Where  $P$  is an  $(2r+1) \times (2r+1)$  operational matrix of integration and is defined as.

$$P = L \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \frac{-1}{f} & \frac{-1}{2f} & \dots & \frac{-1}{(r-1)f} & \frac{-1}{rf} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \frac{1}{2f} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{2(r-1)f} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{2rf} \\ \frac{1}{2f} & \frac{-1}{2f} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{1}{4f} & 0 & \frac{-1}{4f} & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{2rf} & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{-1}{2rf} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (8)$$

The cross-product of two Fourier series vectors is

$$w(t)w^T(t) = \begin{bmatrix} w_0^2 & w_0 w_1 & \dots & w_0 w_r & w_0 w_1^* & \dots & w_0 w_r^* \\ w_1 w_0 & w_1^2 & \dots & w_1 w_r & w_1 w_1^* & \dots & w_1 w_r^* \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ w_r w_0 & w_r w_1 & \dots & w_r^2 & w_r w_1^* & \dots & w_r w_r^* \\ w_1^* w_0 & w_1^* w_1 & \dots & w_1^* w_r & w_1^{*2} & \dots & w_1^* w_r^* \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ w_r^* w_0 & w_r^* w_1 & \dots & w_r^* w_r & w_r^* w_1^* & \dots & w_r^{*2} \end{bmatrix} \quad (9)$$

By using

$$\int_0^L w_n w_m(t) dt = \int_0^L w_n^* w_m^*(t) dt = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ \frac{L}{2} & n = m \end{cases}$$

$$\int_0^L w_0^2(t) dt = L$$

Where  $m$  and  $n$  can assume any of the values  $1, 2, 3, \dots$ . we can easily obtain

$$D = \int_0^L w w^T(t) dt = L \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \frac{1}{2} & & & \\ & & \frac{1}{2} & & \\ & & & \frac{1}{2} & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (10)$$

Where  $D$  is a  $(2r+1) \times (2r+1)$  matrix. Thus  $D$  is a diagonal matrix and the simple structure of this matrix plays important role in the direct method for



solving optimal control problem. Further, using equation (3) we get

$$g(t) - g(0) = \int_0^t f(t') dt'$$

And from equation (4), (5) and (7), using  $g(0) = K^T \Phi(t)$ , we have

$$(G^T - K^T) \Phi(t) = F^T P \Phi(t)$$

Where  $K^T = [g(0) \ 0_1 \ \dots \ 0_r \ 0_1^* \ \dots \ 0_r^*]$  thus we get

$$(G^T - K^T) = F^T P \quad (11)$$

## 2.2 problem statement

Consider linear time invariant (LTI) singular system

$$E \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (12)$$

$$x(0) = x_0 \quad (13)$$

Where  $x \in R^p$  is the state of the system,  $u \in R^z$  is the input vector of the system,  $E \in R^{p \times p}$  is assumed to be singular with  $0 < \text{rank}(E) < p$ , and  $A, B$  are real constant matrices of appropriate size. The problem is to find the optimal control  $u(t)$  and the corresponding state trajectory  $x(t)$ ,  $0 \leq t \leq L$ , satisfying equation (12)-(13) while minimizing the cost function

$$J = \frac{1}{2} x^T(L) S x(L) + \frac{1}{2} \int_0^L [x^T(t) Q x(t) + u^T(t) R u(t)] dt \quad (14)$$

In equation (14),  $T$  denotes transposition,  $S, Q$  and  $R$  are matrices of appropriate dimensions,  $S$  and  $Q$  are symmetric positive semi-definite matrices and  $R$  is a symmetric positive definite matrix.

## 3. Main result

### 3.1. Approximation of the singular system

By expanding  $x_p(t)$ ,  $u_z(t)$  and  $\dot{x}_p(t)$  in Fourier series of order  $r$ , we determine the following approximated values, i.e. for  $P = 1, 2, 3, \dots, p$ , and  $Z = 1, 2, 3, \dots, z$  we get

$$x_p(t) = a_{p0} w_0(t) + \sum_{i=1}^r \{a_{pi} w_i(t) + a_{pi}^* w_i^*(t)\} = A^T \Phi(t) \quad (15)$$

$$u_z(t) = b_{z0} w_0(t) + \sum_{i=1}^r \{b_{zi} w_i(t) + b_{zi}^* w_i^*(t)\} = B^T \Phi(t) \quad (16)$$

$$\dot{x}_p(t) = c_{p0} w_0(t) + \sum_{i=1}^r \{c_{pi} w_i(t) + c_{pi}^* w_i^*(t)\} = C^T \Phi(t) \quad (17)$$

Where  $\{a_{pi}, a_{pi}^*\}$ ,  $\{b_{zi}, b_{zi}^*\}$  and  $\{c_{pi}, c_{pi}^*\}$  are unknowns. Let

$$(Ax(t))_p = y_{p0} w_0(t) + \sum_{i=1}^r \{y_{pi} w_i(t) + y_{pi}^* w_i^*(t)\} = Y^T \Phi(t) \quad (18)$$

$$(Bu(t))_p = l_{p0} w_0(t) + \sum_{i=1}^r \{l_{pi} w_i(t) + l_{pi}^* w_i^*(t)\} = L^T \Phi(t) \quad (19)$$

$$(Ex(t))_p = w_{p0} w_0(t) + \sum_{i=1}^r \{w_{pi} w_i(t) + w_{pi}^* w_i^*(t)\} = W^T \Phi(t) \quad (20)$$

Using equation (18)-(20) for each  $P, P = 1, 2, 3, \dots, p$  the right-hand side of equation (12) has the form

$$W^T \Phi(t) = (Y^T + L^T) \Phi(t)$$

By equating the coefficients of the same-order Fourier series, we obtain for  $P = 1, 2, 3, \dots, p$  and

$$W^T = (Y^T + L^T) \quad (21)$$

Also, by using equation (11) we get the constraints

$$F_{p0} = a_{p0} - x_p(0) - \left( \frac{1}{2} c_{p0} + \frac{1}{2f} \sum_{j=1}^r \frac{1}{j} c_{pj}^* \right) L = 0 \quad (22)$$

And for  $i = 1, 2, 3, \dots, r$  we have

$$F_{pi} = a_{pi} + \frac{L}{2fi} c_{pi}^* = 0 \quad (23)$$

$$F_{pi}^* = a_{pi}^* - \left( -\frac{1}{if} c_{p0} + \frac{1}{2fi} c_{pi} \right) L = 0 \quad (24)$$

### 3.2. The performance index approximation

We now approximate the performance index  $J$  by using Fourier series.

Let

$$r = \begin{pmatrix} (a_{00} \ a_{01} \ \dots \ a_{0r} \ a_{01}^* \ a_{02}^* \ \dots \ a_{0r}^*)^T \\ \vdots \\ (a_{r1} \ a_{r2} \ \dots \ a_{rr} \ a_{r1}^* \ a_{r2}^* \ \dots \ a_{rp}^*)^T \end{pmatrix} \quad (25)$$

$$s = \begin{pmatrix} (b_{10} \ b_{12} \ \dots \ b_{1r} \ b_{11}^* \ b_{12}^* \ \dots \ b_{1r}^*)^T \\ \vdots \\ (b_{z1} \ b_{z2} \ \dots \ b_{zr} \ b_{z1}^* \ b_{z2}^* \ \dots \ b_{zr}^*)^T \end{pmatrix} \quad (26)$$

And define the matrices:

$$\hat{\Phi}_1(t) = \begin{pmatrix} \Phi^T(t) & 0 \\ 0 & \Phi^T(t) \end{pmatrix}, \quad \hat{\Phi}_2(t) = \begin{pmatrix} \Phi^T(t) & 0 \\ 0 & \Phi^T(t) \end{pmatrix} \quad (27)$$

Note that  $\Gamma, S$  and  $\hat{\Phi}_1(t)$  and  $\hat{\Phi}_2(t)$  are matrices of order  $P(2r+1) \times 1, Z(2r+1) \times 1$  and  $P \times P(2r+1)$  and  $Z \times Z(2r+1)$  respectively. Using equation (15) and (16) and (25)-(27) the state and control vector can be expressed as

$$x(t) = \hat{\Phi}_1(t)r \quad (28)$$

$$u(t) = \hat{\Phi}_2(t)s \quad (29)$$

Substituting equation (28) and (29) in equation (14) we get

$$J = \frac{1}{2}r^T \hat{\Phi}^T(L)S\hat{\Phi}(L)r + \frac{1}{2}r^T \left[ \int_0^L \hat{\Phi}^T(t)Q\hat{\Phi}(t)dt \right] r + \frac{1}{2}s^T \left[ \int_0^L \hat{\Phi}^T(t)R\hat{\Phi}(t)dt \right] s \quad (30)$$

Equation (30) can be computed more efficiently by using equation (10) and writing  $J$  as

$$J = \frac{1}{2}r^T [\Phi(L)\Phi^T(L) \otimes S] r + \frac{1}{2}r^T (D \otimes Q) r + \frac{1}{2}s^T (D \otimes R) s \quad (31)$$

Where  $\otimes$  denotes the Kronecker product .

#### 4. Conclusion

The Fourier series and the associated matrix of integration (operational matrix) are applied to solve the optimal control of singular systems. The method is based upon reducing a linear singular quadratic optimization problem to a set of algebraic equations. The advantage of using Fourier series as compared to Laguerre polynomials, shifted Legendre polynomials and Chebyshev series is that in the present method the, most of the elements of the

operational matrix given in (8) are zeros, and matrix  $D$  introduced in (10) is a diagonal matrix, hence making Fourier series computationally very attractive. As we can see from the tables, it is shown that with a relatively low  $r$ , we have a very accurate solution.

#### 5. References

- [1]. MS. Corrington. Solutions of differential and integral equations with Walsh function. IEEE Transactions on Circuit Theory, 20: 470-476, 1973.
- [2]. C. Hwang and YP. Shih. Optimal control of delay systems via block pulse functions. Journal of Optimization Theory and Application, 45: 101-112, 1985.
- [3] R. Ebrahimi, M. Samavat, M. A. Vali, and A. A.Gharavisi, "Application of Fourier series direct method to the optimal control of singular systems," ICGST-ACSE Journal, vol. 7, no. 2, pp. 19-24, 2007.
- [4] R. Ebrahimi, M. A. Vali, M. Samavat, and A. A. Gharavisi, "A computational method for solving optimal control of singular systems using the Legendre wavelets," ICGST-ACSE Journal, vol. 9, no.2, pp. 1-6, 2009.
- [5]. HM. Perng. Direct approach for the optimal control of linear time-delay systems via shifted Legendre polynomials. International Journal of Control, 43: 1897-1904, 1986.
- [6]. M. Razzaghi and M. Razzaghi. Fourier series direct method for variational problem. Int. J. control, 48: 887-895, 1988.
- [7]. L. Dai, singular control system, Springer, Berlin, 1989
- [8]. M. Kuijper, First Order Representation of Linear systems, Birkhauser, Boston, 1994.

## یک جواب رضایت بخش مساله دوسطحی با چندین تابع هدف کسری خطی در هر دو سطح

عباس مهربانی\*\*، فارغ التحصیل کارشناسی ارشد ریاضی کاربردی، دانشگاه شهید چمران اهواز، abbasmehr۷۹۵@gmail.com

حبیبه صادقی\*، عضو هیأت علمی گروه ریاضی، دانشگاه شهید چمران اهواز، habibe.sadeghi@scu.ac.ir

**چکیده:** روش های تعاملی یکی از تکنیک های حل مسایل چند هدفه می باشند. در این مقاله، مساله برنامه ریزی دوسطحی چند هدفه با توابع هدف کسری خطی در هر دو سطح را، با کمک سری تیلور و شرایط K.K.T تغییر متغیر و استفاده از متغیرهای دو دویی به یک مساله چند هدفه خطی صحیح - آمیخته ۰ و ۱ تبدیل می کنیم. سپس، با استفاده از الگوریتم نقطه مرجع و تعریف جهت جستجو، یک جواب رضایت بخش مساله چند هدفه صحیح - آمیخته را بدست می آوریم. در پایان با ارایه یک مثال عددی کارایی روش را نشان می دهیم.

**کلمات کلیدی:** برنامه ریزی چند هدفه کسری، برنامه ریزی دوسطحی، سری تیلور، برنامه ریزی صحیح-آمیخته.

### مقدمه

ابتکاری.

حل مسایل برنامه ریزی دوسطحی غالباً سخت می باشد، لذا محققان در تلاشند تا روش های کاراتری را برای حل این مسایل، با تبدیل آن به مسایل برنامه ریزی چند هدفه ارایه دهند. "شای و شی" در سال ۱۹۹۷ یک روش تعاملی برای حل مسایل دوسطحی چند هدفه، با تفکیک آن به دو مساله چند هدفه ارایه دادند. روش هایی نیز برای حل مسایل چند سطحی با توابع هدف کسری بر اساس مفاهیم فازی و روش های آرمانی ارایه شده است. [۳] در این مقاله برای حل مساله دوسطحی چند هدفه کسری در هر دو سطح، با بهره گیری از سری تیلور و تغییر متغیر، مساله را به صورت خطی تبدیل کرده و روش نقطه مرجع برای حل مساله بکار می بریم.

مساله برنامه ریزی چند سطحی در واقع یک مساله بهینه سازی سلسله مراتبی و غیر متمرکز است. هر سطح آن می تواند دارای چند تصمیم گیرنده و هر تصمیم گیرنده می تواند دارای چندین تابع هدف باشد. فرم ریاضی این نوع برنامه ریزی اولین بار توسط "کندلر و تونسل" در سال ۱۹۷۸ به طور رسمی در مجلات و مقالات ارایه شد. اکثر مقالات و کتابهای موجود در این موضوع، مربوط به مسایل برنامه ریزی دوسطحی می باشد. روشهای حل برنامه ریزی دوسطحی را می توان در چهار دسته قرار داد: الف) روشهای بر اساس شمارش رئوس ب) روشهای بر اساس شرایط کان-تاکرج) روشهای بر اساس مفاهیم فازی د) روشهای

پارتو را تعریف می کنیم. مفهوم کارایی اولین بار توسط شخصی به نام "پارتو" در سال ۱۸۹۶ ارائه شد. [۷]

جواب کارا: جوابی که بردار معیار آن نامغلوب باشد. جواب رضایت بخش: جوابی که سطح انتظار تصمیم گیرنده را برآورده می سازد.

مدل مساله برنامه ریزی چند هدفه کسری به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} \text{Max } \frac{c_1x + \alpha_1}{d_1x + \beta_1} &= \frac{N_1(x)}{D_1(x)} \\ &\vdots \\ \text{Max } \frac{c_kx + \alpha_k}{d_kx + \beta_k} &= \frac{N_k(x)}{D_k(x)} \\ \Delta &= \{s.t \ AX \leq b, x \geq 0\} \end{aligned} \quad (3)$$

با فرض  $I = \{i : N_i(x) \geq 0; \exists x \in \Delta\}$  و  $I^c = \{i : N_i(x) < 0; \forall x \in \Delta\}$  متغیر  $\nabla = \left\{ \frac{1}{d_ix + \beta_i} \geq t; i \in I, \frac{-1}{c_ix + \alpha_i} \geq t; i \in I^c \right\}$  مساله (۳) را به یک مساله چند هدفه خطی تبدیل می کنیم.

### ۳. مساله برنامه ریزی دو سطحی خطی چند هدفه با توابع هدف کسری در هر دو سطح (MOFBLP)

فرم کلی مساله دو سطحی خطی چند هدفه با توابع هدف کسری در سطح بالا و پایین به صورت زیر می باشد:

### ۱. برنامه ریزی کسری خطی (LFP)

در بعضی از مسایل غیر خطی، مسایلی وجود دارد که تابع هدف به صورت نسبتی از دو تابع دیگر است. برای مثال بیشینه سازی نسبت کل تولید به نفر ساعت (بهره وری) یا بیشینه سازی نسبت سود به سرمایه (بازدهی) یا نسبت کود مصرفی به سطح زیر کشت (شاخص پایداری)، که به این نوع مسایل برنامه ریزی کسری می گوئیم. مدل برنامه ریزی کسری خطی به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} \text{Max } \frac{cx + \alpha}{dx + \beta} &= \frac{N(x)}{D(x)} \\ s.t \ AX &\leq b \\ x &\geq 0 \end{aligned} \quad (1)$$

اگر مخرج بتواند مقدارهای مثبت و منفی را اختیار کند، به دلیل محدب بودن ناحیه شدنی مساله، مخرج مقدار صفر را نیز می تواند دارا باشد و این سبب می شود که مساله کسری خوش تعریف نباشد، بنابراین در تمامی این مقاله فرض می کنیم که برای همه نقاط شدنی مخرج همواره مقداری مثبت می باشد. چارنر و کوپر در سال ۱۹۶۲ با تغییر متغیرهای زیر مساله کسری (۱) را به صورت خطی تبدیل کرده و خواص دقیق و کاملی برای آن بیان کردند.

$$\frac{1}{dx + \beta} = t, \quad y = tx \quad (2)$$

### ۲. برنامه ریزی چند هدفه کسری خطی (MOLFP)

بسیاری از مسایل واقعی تحت تاثیر چند هدف متعدد قرار دارند، جواب موجه ای که همه ی توابع هدف را بطور همزمان بهینه کند معمولاً وجود ندارد به همین دلیل برای مسایل چند هدفه جواب های کارا یا بهین

$x^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$  به صورت زیر تعریف می شود:

$$f(x_1, \dots, x_n) = f(x_1^*, \dots, x_n^*) + (x_1 - x_1^*) \frac{\partial f(x_1^*, \dots, x_n^*)}{\partial x_1} + \dots + (x_n - x_n^*) \frac{\partial f(x_1^*, \dots, x_n^*)}{\partial x_n} + \frac{1}{2} \left( (x_1 - x_1^*)^2 \frac{\partial^2 f(x_1^*, \dots, x_n^*)}{\partial^2 x_1} + \dots + (x_n - x_n^*)^2 \frac{\partial^2 f(x_1^*, \dots, x_n^*)}{\partial^2 x_n} \right) + \dots$$

$$\max_x F_1(x, y) = \frac{c_1^1 x + d_1^1 y + \alpha_1}{e_1^1 x + f_1^1 y + \beta_1} = \frac{N_1(x)}{D_1(x)}$$

$$\max_x F_k(x, y) = \frac{c_k^1 x + d_k^1 y + \alpha_k}{e_k^1 x + f_k^1 y + \beta_k} = \frac{N_k(x)}{D_k(x)}$$

$$s.t. A^1 x \leq b^1$$

$$\max_y f_1(x, y) = \frac{c_1^2 x + d_1^2 y + \alpha_1^2}{e_1^2 x + f_1^2 y + \beta_1^2} = \frac{N_1^2(x)}{D_1^2(x)} \quad (4)$$

⋮

$$\max_y f_l(x, y) = \frac{c_l^2 x + d_l^2 y + \alpha_l^2}{e_l^2 x + f_l^2 y + \beta_l^2} = \frac{N_l^2(x)}{D_l^2(x)}$$

$$s.t. A^2 x + B^2 y \leq b^2$$

$$x, y \geq 0$$

## ۷. الگوریتم محاسبه جواب های کارا مساله دو سطحی خطی با توابع هدف کسری در هر دو سطح

گام (۱): بطور جداگانه هر تابع هدف سطح دوم را در فضای شدنی مساله سطح دوم بهینه کرده و سپس بسط تیلور مرتبه اول تابع هدف را جایگزین تابع هدف کسری می کنیم.

گام (۲): مساله چند هدفه سطح دوم را که به صورت خطی تبدیل شده با استفاده از روش مجموع وزن دار [۷]، به یک مساله تک هدفه تبدیل می کنیم.

گام (۳): شرایط بهینگی کاروش-کاهن-تاکر مساله سطح دوم را، به صورت محدودیت به محدودیت های سطح اول مساله (۴) اضافه می کنیم.

گام (۴): توابع هدف کسری سطح اول را با کمک تغییر متغیر  $\nabla$  به صورت خطی تبدیل می کنیم.

گام (۵): با استفاده از متغیر های ۰ و ۱، شرایط مکمل زائد را که غیر خطی می باشند را به محدودیت های خطی تبدیل می کنیم [۶]. بنابراین مساله (۴) به صورت یک مساله چند هدفه صحیح - آمیخته تبدیل می گردد.

گام (۶): جدول بازدهی مساله چند هدفه صحیح - آمیخته را بدست می آوریم. [۷] فرض کنید  $z^* = (z_1^*, \dots, z_k^*)$  نقطه ایده آل باشد، که  $z_i^*$  مقدار بهینه تابع  $F_i$ ،  $i=1, \dots, k$  به تنهایی می باشد.

گام (۷): اولین نقطه مرجع را ایده آل در نظر می گیریم و الگوریتم نقطه مرجع را برای حل آن بکار می بریم.

همانطور که دیده می شود فرض کرده ایم که محدودیت های سطح اول مساله شامل متغیرهای تحت کنترل سطح دوم، یعنی  $y$  نمی باشد. این فرض سبب می شود که ناحیه القایی مساله دو سطحی خطی همبند شود. [۴]

برخی خصوصیات مسایل برنامه ریزی دو سطحی [۶]:  
۱. پیوستگی و کرانداری توابع هدف و محدودیت ها وجود جواب را برای مساله تضمین نمی کند. ۲. معمولاً ناحیه شدنی مساله نامحدوب است. ۳. مساله برنامه ریزی دو سطحی یک مساله NP - hard است.

## ۶. سری تیلور

بسط تیلور در سال ۱۷۱۵ توسط بروک تیلور معرفی شد. با کمک بسط تیلور توابع بی نهایت مشتق پذیر را به صورت توابع نمایی نوشت. اگر تابع دارای مشتقات بالاتری باشد، آنگاه درجه چندجمله ای بسط تیلور آن بالاتر و تقریب بهتری از تابع را برای ما مشخص می کند. بسط تیلور تابع  $f(x)$  حول نقطه

با تغییر متغیر  $\nabla$  و استفاده از متغیرهای  $\bullet$  و  $\bullet$ ، مساله را بصورت خطی تبدیل کرده و جواب رضایت بخشی برای آن بدست می آوریم.

## مراجع

- [1] M.A . Abo-Sinna and A. I. Baky ,Interactive balance space approach for solving multi –level multi –objective programming problems, Inf . Sci. 177(2007), pp . 3397-3410
- [2] M.J. Alves and J. Chi´ maco, An interactive reference point approach for multi objective mixed-integer programming using branch and bound, Eur. J. Oper. Res. 124 (2000), pp. 478–494pp. 478–494 .
- [3] K. Lachhwani1, M. Prasad Poonia, Mathematical solution of multilevel fractional programming problem with fuzzy goal programming approach , Journal of Industrial Engineering International 2012.
- [4] A.G. Mersha and S. Dempe, Linear bilevel programming with upper level constraints depending on the lower level solution, Appl. Math. Comput. 180(2006), ppt. 247-254
- [5] B.D. Craven, Fractional Programming, Heldermann Verlag, Berlin, 1988.
- [6] S. Dempe, Foundations of Bilevel Programming, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2002
- [7] M. Ehrgott, Multicriteria Optimization, Springer, Berlin, 2005.

گام (۸) : اگر تصمیم گیرنده از مقدار تابع هدف  $z$  ام ، رضایت نداشته باشد ، نقطه مرجع جدید را  $z^* = (z_1^*, \dots, z_j^* + \theta, \dots, z_k^*)$  قرار می دهیم که در آن  $\theta > 0$  می باشد. به این روش تغییر نقطه مرجع روش جستجوی جهت دار می گویند. [۲]

گام (۹): گام (۸) تا موقعی تکرار می شود که به یک جواب رضایت بخش از نظر تصمیم گیرنده برسیم. برای حل مسایل چند هدفه از نرم افزار (MOMILP) استفاده کرده ایم.

## ۸. مثال عددی

مساله دو سطحی خطی زیر را که دارای دو تابع هدف کسری در سطح بالا و پایین می باشد را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned}
 \max_x F_1(x, y) &= \frac{2x-y}{x+y+1} \\
 \max_x F_2(x, y) &= \frac{-x-2y-3}{x+2y+2} \\
 s.t \quad & \\
 \max_y f_1(x, y) &= \frac{x-y+1}{x+y+2} \quad (5) \\
 \max_y f_2(x, y) &= \frac{x+y+1}{2x+y+3} \\
 s.t \quad & x + y \leq 4 \\
 & x, y \geq 0
 \end{aligned}$$

نقاط  $(0, 4)$  و  $(4, 0)$  نقاط بهینه ی توابع  $f_2, f_1$  به تنهایی برای سطح دوم می باشد. با نوشتن بسط تیلور توابع هدف سطح دوم ، حول نقاط بهینه و انتخاب  $w_1 = \frac{1}{2}$  و افزودن شرایط  $K.K.T$  مساله سطح دوم، به صورت محدودیت به محدودیت های سطح اول، مساله به صوت یک مساله، دو هدفه به صورت زیر تبدیل می شود:

$$\begin{aligned}
 \max_x F_1(x, y) &= \frac{2x-y}{x+y+1} \\
 \max_x F_2(x, y) &= \frac{-x-2y-3}{x+2y+2} \\
 s.t \quad & \lambda \geq -0.132 \\
 & \lambda(x + y - 4) = 0 \quad , \\
 & y(\lambda + 0.132) = 0 \quad , \quad x, y, \lambda \geq 0
 \end{aligned}$$



## روشی نوین برای جداسازی داده ها با استفاده از ابر کره جدا کننده

سعید کتابچی ، عضو هیأت علمی گروه ریاضی کاربردی، دانشگاه گیلان، sketabchi@guilan.ac.ir

حسین موسایی، عضو هیأت علمی گروه ریاضی ، دانشگاه بجنورد، hmoosaei@gmail.com

محمد رزاقی، دانشجوی دکتری ریاضی کاربردی، دانشگاه گیلان، razzaghi.mohamad@gmail.com

**چکیده:** در این مقاله روشی جدید برای جداسازی داده ها بر پایه جداسازی با استفاده از ابر کره جداکننده ارائه میکنیم. ایده اصلی در اینجا خطی سازی قیود مساله ابر کره جداکننده برای رهایی از نامحدب بودن مساله می باشد. برای حل این مساله از نرم افزار متلب استفاده شده است. کارایی روش ذکر شده با استفاده از داده های استاندارد UCI نشان داده شده و نتایج در قالب جدول ارائه گردیده است.

**کلمات کلیدی:** جداسازی، ماشین بردار پشتیبان، ابرکره جداکننده، برنامه ریزی غیرخطی.

### مقدمه

شود از دقت و سرعت بسیار بیشتری برخوردار است. روشهای زیادی مانند جداسازی با ابر صفحه جداکننده با بیشترین حاشیه<sup>۴</sup> برای جداسازی دوتایی، ماشین بردار پشتیبان دوتایی<sup>۵</sup>، ابر کره جداکننده دوتایی<sup>۶</sup> و ... مطرح شده اند. در اینجا با استفاده از ایده های مطرح شده در روشهای بردار پشتیبان دوتایی و ابر کره جداکننده دوتایی و همچنین نقایصی که مساله ابر کره جداکننده دوتایی دارد مدلی برای جداسازی داده ها ارائه کرده و در بخش نتایج عددی کارایی و عملکرد مساله ارائه شده در این مقاله را بررسی می کنیم.

جداسازی داده ها<sup>۱</sup> در سالهای اخیر بسیار مورد توجه قرار گرفته است. از جمله کاربردهای آن می توان به شناسایی اعداد و حروف، تشخیص صدا و چهره و دست خط، تشخیص بیماری و ... اشاره نمود [۱] و [۲]. اولین ایده در جداسازی داده ها - که ماشین بردار پشتیبان<sup>۲</sup> نامیده شد- توسط واپنیک<sup>۳</sup> ارائه گردید [۳] و [۴]. در مقایسه با روشهای دیگری (از جمله شبکه های عصبی) که برای جداسازی به کار گرفته می

Classification<sup>۱</sup>

Machine Vector Support<sup>۲</sup>

Vapnik<sup>۳</sup>

Margin Maximum<sup>۴</sup>

Machine Vector Support Twin<sup>۵</sup>

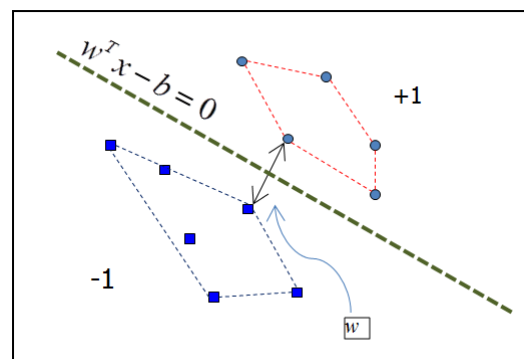
(THSVM) Machine Vector Support Hypersphere Twin<sup>۶</sup>

## ماشین بردار پشتیبان (SVM)

مساله جدا سازی داده ها با استفاده از ماشین بردار پشتیبان با توجه به داده های  $\{(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)\}$  که در آن  $y_i = +1$  or  $-1$  برای  $i = 1, \dots, n$  به صورت زیر فرمول بندی می گردد:

$$\begin{aligned} \min \quad & \frac{1}{2} w^T w + C \sum_{i=1}^n \xi_i \\ \text{s.t.} \quad & y_i (w^T x_i + b) \geq 1 - \xi_i, \\ & \xi_i \geq 0, i = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (1)$$

که در آن  $C$  پارامتر جریمه برای کنترل داده ها می باشد. با حل مساله (۱) و تعیین بردار  $w$  و اسکالر  $b$ ، ابر صفحه جدا کننده  $w^T x + b = 0$  را برای جداسازی داده ها بدست می آوریم. [۴] و [۳]



تعبیر هندسی ماشین بردار پشتیبان

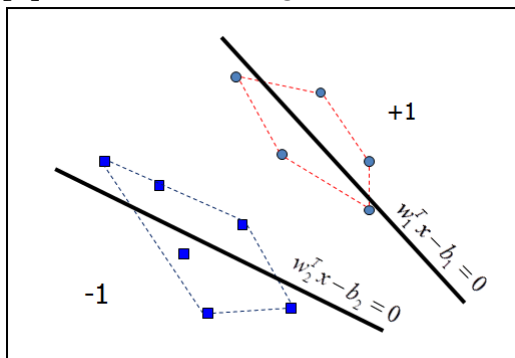
دوتایی به صورت زیر فرمول بندی می گردد.

$$\begin{aligned} \min \quad & \frac{1}{2} \|Aw^{(1)} + eb^{(1)}\|^2 + c_1 e^T \xi^{(1)} \\ \text{s.t.} \quad & -(Bw^{(1)} + eb^{(1)}) \geq e - \xi^{(1)}, \\ & \xi^{(1)} \geq 0_e. \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \min \quad & \frac{1}{2} \|Bw^{(2)} + eb^{(2)}\|^2 + c_2 e^T \xi^{(2)} \\ \text{s.t.} \quad & (Aw^{(2)} + eb^{(2)}) \geq e - \xi^{(2)}, \\ & \xi^{(2)} \geq 0_e. \end{aligned} \quad (3)$$

که در آن  $e$  برداری با عناصر یک می باشد. در مساله های (۲) و (۳) ماتریس های  $A$  و  $B$  بیان کننده داده های دو کلاس  $+1$  و  $-1$  می باشند. همچنین  $c_1$  و  $c_2$  به ترتیب پارامترهای جریمه برای مساله های فوق هستند.

با حل دو مساله فوق ابر صفحه های  $x^T w^{(1)} + b^{(1)} = 0$  و  $x^T w^{(2)} + b^{(2)} = 0$  برای جدا سازی داده های مفروض بدست می آیند. [۵]



تعبیر هندسی ماشین بردار پشتیبان دوتایی

## ابر کره جدا کننده

یکی از ایده هایی که در سالهای اخیر برای جدا سازی داده ها مطرح شده است جداسازی داده ها با استفاده از ابر کره جدا کننده می باشد. در این دیدگاه به دنبال یافتن ابرکره ای با کمترین شعاع هستیم که تمام داده ها را تحت پوشش قرار دهد. مدل بندی ابرکره جدا کننده

## ماشین بردار پشتیبان دوتایی

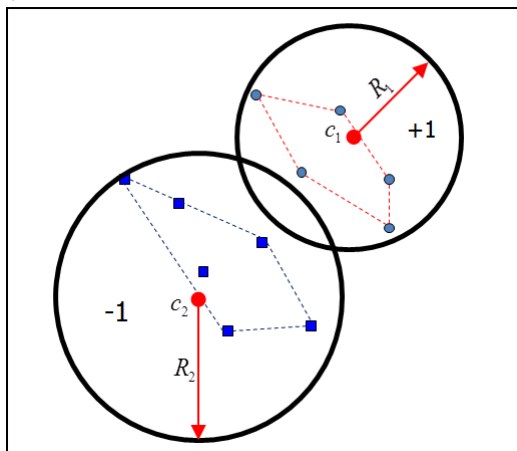
در این روش به جای یافتن ابر صفحه جدا کننده برای داده های مورد نظر، دو ابر صفحه غیر موازی را با حل دو مساله برنامه ریزی محدب یافته و فاصله داده ها با ابر صفحه ها را ملاک کلاس بندی این روش قرار می دهیم. مساله های برنامه ریزی ماشین بردار پشتیبان

$$\min \frac{1}{2} \sum_{i \in I_2} \|x_i - c_2\|^2 - v_2 R_2^2 + C_2 \sum_{j \in I_1} \xi_j \quad (7)$$

$$s.t. \|x_i - c_2\|^2 \geq R_2 - \xi_i, \xi_i \geq 0, i \in I_1.$$

که در آن  $x_i$  ها داده های مورد نظر،  $c_2, c_1$  به ترتیب مرکز و  $R_2, R_1$  شعاع های کره های بدست آمده می باشند. همچنین  $C_2, C_1$  پارامتر خطای در نظر گرفته برای داده ها در مسایل فوق می باشند. [۱۰]

با توجه به تابع هدف و همین قیود مساله و به وضوح در می یابیم که مساله های ذکر شده در بالا مسائلی محدب نمی باشند. در بسیاری از مقالات از جمله [۱۰] و [۱۱] بدون در نظر گرفتن نامحدب بودن مساله اولیه به سراغ مساله دوگان و نوشتن شرایط  $KKT$  رفته و جواب مساله اولیه را به اشتباه از روی جواب مساله دوگان بدست می آورند. برای رفع مشکلات به وجود آمده روشی کارآمد را در ادامه ارائه می کنیم.



تعبیر هندسی ابر کره جداکننده دوتایی

## خطی سازی مساله ابر کره جدا کننده دوتایی و تبدیل آن به مساله برنامه ریزی خطی

با توجه به نامحدب بودن مسایل (۶) و (۷)، یک تقریب از تابع هدف و همچنین قیود که فرم خطی

به صورت زیر می باشد:

$$\min R^2 \quad (4)$$

$$s.t. \|x_i - c\|^2 \leq R^2,$$

$$\forall i = 1, \dots, n.$$

که در آن  $x_i$  ها داده های مفروض،  $R$  شعاع و  $c$  مرکز ابرکره می باشند. در حالت کلی ممکن است داده ها از یک پراکندگی برخوردار باشند و لذا ابر کره ای که تمام داده ها را در بر گیرد ممکن است مقرون به صرفه نباشد و لذا برای چیره شدن بر این مشکل داده هایی که دور از بقیه داده ها هستند را با استفاده از یک پارامتر خطایی داخل ابر کره قرار می دهیم. این پارامتر خطا طوری انتخاب می شوند که در مجموع کل داده ها، خطا را به مینیمم خود می رسانند. مدل بندی در این حالت به فرم زیر تبدیل می شود:

$$\min_{R, c, \xi} R^2 + C \sum_{i=1}^n \xi_i \quad (5)$$

$$s.t. \|x_i - c\|^2 \leq R^2 + \xi_i,$$

$$\xi_i \geq 0, \forall i = 1, \dots, n.$$

توجه داریم که مساله (۵) نامحدب می باشد. [۹]

## ابر کره جداکننده دوتایی

با استفاده از ایده ماشین بردار پشتیبان دوتایی که در بخش های قبل بیان شد، مساله یافتن ابرکره ای که داده های مجموعه اول را در خود نگه داشته و داده های مجموعه دوم را خارج از خود قرار می دهد و بالعکس به صورت زیر مدل بندی می شود که به آن ابر کره جداکننده دوتایی (THSVM) گفته می شود:

$$\min \frac{1}{2} \sum_{i \in I_1} \|x_i - c_1\|^2 - v_1 R_1^2 + C_1 \sum_{j \in I_2} \xi_j \quad (6)$$

$$s.t. \|x_j - c_1\|^2 \geq R_1 - \xi_j,$$

$$\xi_j \geq 0, j \in I_2.$$

Datas	Size	Accuracy (%)	Time (s)
Haberman	306×3	73.53	0.52
Spect	237×22	58.8	0.51
German	1000×24	70	1.21
housevotes84	435 ×16	89.42	0.54
Diagnosis	100×9	85	0.44
ionosphere	351×34	66.95	0.69

با توجه به دقت بالای داده های مورد آزمایش و زمان اجرای پایین آن که در جدول فوق ذکر شده است، کارآمدی روش ارائه شده در این مقاله تایید می شود.

سازی شده قید های مسایل مذکور می باشد را در نظر می گیریم. در نهایت مسایل (۶) و (۷) به فرم زیر تبدیل می گردند:

$$\begin{aligned} \min \quad & \frac{1}{2} \sum_{i \in I_1} \|x_i - c_1\|^2 - v_1 R_1 + C_1 \sum_{j \in I_2} \xi_j \\ \text{s.t.} \quad & \|x_j\|^2 - 2x_j^T c_1 \geq R_1 - \xi_j, \\ & \xi_j \geq 0, j \in I_2. \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \min \quad & \frac{1}{2} \sum_{i \in I_2} \|x_i - c_2\|^2 - v_2 R_2 + C_2 \sum_{j \in I_1} \xi_i \\ \text{s.t.} \quad & \|x_i\|^2 - 2x_i^T c_2 \geq R_2 - \xi_i, \\ & \xi_i \geq 0, i \in I_1. \end{aligned} \quad (9)$$

از (۸) و (۹) در می یابیم که مسایل فوق مسایل برنامه ریزی درجه دو با قیود خطی می باشند و برای حل آنها از جعبه Quadprog مربوط به بخش بهینه سازی در نرم افزار متلب<sup>۷</sup> استفاده می کنیم. در بخش بعدی نتایج عددی را در جدولی ارائه و کارایی روش را بررسی می نماییم.

## نتایج عددی

در این بخش دقت و سرعت روش ارایه شده را با داده هایی که از [۶] استخراج شده است بررسی می کنیم. برای انجام محاسبات از برنامه متلب ۲۰۱۴a و سیستمی با پردازنده Corei۵ و ۸ گیگابایت رم استفاده شده است. برای اینکه دقت روش بیان شده را بسنجیم به صورت تصادفی ۲۰ درصد از داده ها را انتخاب کرده و این عمل را ۵ مرتبه برای کل داده ها اعمال و در انتها میانگین آنها را به عنوان درصد دقت بیان می کنیم. در جدول زیر نتایج عددی بدست آمده به نمایش در آمده است.

MATLAB<sup>۷</sup>

## مراجع

- [7] Osuna E, Freund R, Girosi F, Training support vector machines: an application to face detection, roceedings of the 1997 conference computer vision and pattern recognition[C]. IEEE Computer Society, Washington, pp 130-136.
- [8] Yuan-Hai Shao, Zhen Wang, Wei-Jie Chen, Nai-Yang Deng, A regularization for the projection twin support vector machine, Knowledge-Based Systems, Volume 37, January 2013, Pages 203-210.
- [9] David M. J. Tax and Robert P. W. Duin. 2004. Support Vector Data Description. Mach. Learn. 54, 1 (January 2004), 45-66.
- [10] Peng, Xinjun and Xu, Dong, Twin support vector hypersphere (TSVH) classifier for pattern recognition, Neural Computing and Applications, , Volume 24, 2014, Pages 1207-1220.
- [11] Xinjun Peng, Dong Xu, A twin-hypersphere support vector machine classifier and the fast learning algorithm, Information Sciences, 2013, Pages 12-27.
- [1] Joachims T, Text categorization with support vector machines: learning with many relevant features, European conference on machine learning no. 10[C] 1398. Chemnitz, Springer, pp 137-142.
- [2] Cao L, Tay FEH financial forecasting using support vector machines, Neural Comput Appl 10(2), 184-192.
- [3] Vapnik, V. N., Chervonenkis, A. Theory of pattern recognition. Moscow: Nauka [in Russian], 1974.
- [4] Vapnik VN Statistical learning theory. Wiley, New York, 1998.
- [5] Xu, Yitian, A Guo, Rui, A Wang, Laisheng , A Twin Multi-Class Classification Support Vector Machine, Cognitive Computation, Volume 5, Pages 580-588.
- [6] P.M. Murphy, D.W.Aha, UCI repository of machine learning database, 1992.



# A new DEA model to determine the most efficient DMU in presence of weight restrictions, an application in supplier selection problem

**Bohloul Ebrahimi**, Ph.D candidate, Industrial Engineering,  
Technology Development Institute (ACERC), b\_ebrahimi@jdsharif.ac.ir  
**Morteza Rahmani\***, associate professor of Applied Mathematics,  
Technology Development Institute (ACERC), Rahmanimr@jdsharif.ac.ir

**Abstract:** In real-life applications of data envelopment analysis (DEA) models, considering weight restrictions are necessary to prevent ignored or overestimated inputs and outputs in performance evaluation process. Also it is required to consider the viewpoints of decision maker (DM) about the weights of inputs and outputs. In addition, in some cases, DM needs to determine the most efficient decision making unit (DMU). For these purposes, here we propose a new mixed integer linear DEA model to find the most efficient DMU in presence of weight restrictions. The proposed model solves just one model to find the best DMU. The application of the model is indicated by using a real data set of 18 suppliers. The results are compared with standard DEA model (CCR model).

**Keywords:** Data Envelopment Analysis (DEA), weight restrictions, efficiency measure, most efficient DMUs, supplier selection.

## 1 INTRODUCTION

Data envelopment analysis (DEA), introduced by Charnes, Cooper, and Rhodes [1], is a mathematical programming to measure the relative efficiency of a set of decision making units (DMUs). In classical DEA models, the weights of criteria are free, so some inputs and outputs can be overestimated or ignored in performance evaluation process. Also the viewpoint of decision maker about the importance of criteria is not considered. To overcome these drawbacks different types of weight restrictions have been proposed. The most popular type is linear constraints, which can be categorized into

assurance regions type 1 (ARI) and type 2 (ARII) and absolute weight restrictions. By using the absolute weight restrictions and ARII, some problems such as infeasibility and underestimate the efficiency may be occurs [2]. In 2010, Khalili et al. [3] proposed a nonlinear programming to overcome these drawbacks. In presence of ARI, none of the mentioned problems occurs, so this type of weight restriction has been used extensively in real-life applications of DEA [3]. It should be noted that the complete flexibility in the selection of weights is significant in the identification of inefficient DMUs.

CCR model effectively divides DMUs into two groups: efficient DMUs and inefficient

\*Corresponding Author





DMUs. The efficient DMUs do not necessarily have the equivalent performance in real practices. In the real-world applications, it is necessary to rank all DMUs, or find the most efficient DMU. For this purpose, different approaches have been proposed. Cross efficiency [4] and super efficiency [5] are some examples of these approaches. These approaches solve at least one model for each DMU, however some researchers proposed various models to determine the most efficient DMU by solving just one model. The interest readers can refer to [6, 7, 8], for more study about these models. To the best of our knowledge, all of these models have a limit in considering weight restrictions. As explained, considering weight restrictions are necessary in real-world applications of DEA model. Based on this lack, in the next section we developed a new model to fill this gap and enhance the area of finding the most efficient DMU models.

## 2 A new model to find the most efficient DMU

Utilizing weight restrictions in DEA is an appropriate way to prevent the DMUs to overestimate or ignore some outputs and inputs in the measurement of relative efficiency. As explained in section 1, by using ARI type of weight restrictions, no problem occur. Therefore, in this paper we will use the ARI in our approach. Our proposed model to find the most efficient DMU in presence of weight restrictions is formulated as follows:

$$\begin{aligned}
 & \text{Min } d = \sum_{j=1}^k d_j \\
 & \text{s.t.} \\
 & \sum_{r=1}^m u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^n v_i x_{ij} + d_j = 0; \quad j=1, \dots, k \\
 & \sum_{j=1}^k \theta_j = k - 1 \\
 & d_j \leq M \theta_j \quad j=1, \dots, k \\
 & \theta_j \leq N d_j \quad j=1, \dots, k \\
 & \theta_j \in \{0, 1\}, d_j \geq 0 \quad j=1, \dots, k \\
 & \alpha_i^- \leq \frac{v_i}{v_{i-1}} \leq \alpha_i^+ \quad i=2, 3, \dots, n \\
 & \beta_r^- \leq \frac{u_r}{u_{r-1}} \leq \beta_r^+ \quad r=2, 3, \dots, m \\
 & u_r, v_i \geq \epsilon \quad r=1, 2, \dots, m \\
 & \quad \quad \quad i=1, 2, \dots, n
 \end{aligned} \tag{1}$$

Where,  $x_{ij}$  is the amount of  $i$ th input consumed by  $DMU_j$ ,  $y_{rj}$  is the amount of  $r$ th output produced by  $DMU_j$  ( $j = 1, 2, \dots, k$ ;  $r = 1, 2, \dots, m$ ;  $i = 1, 2, \dots, n$ ),  $d_j$  represents the deviation variable of  $DMU_j$  from the efficiency.  $M$  and  $N$  are large positive numbers,  $\alpha_i^-, \alpha_i^+, \beta_r^-, \beta_r^+$  are real positive numbers and  $\epsilon$  is the maximum non-Archimedean. This model minimizes the sum of deviation variables. Theorem 2.1 proves that solving model (1) gives a single most efficient  $DMU$ .

**Theorem 2.1.** *Model (1) gives a single most CCR-efficient  $DMU$ .*

*Proof.* According to the CCR-efficiency definition in the literature of DEA,  $DMU_p$  is a CCR-efficient if and only if there exists at least a common set of optimal weights  $u^* > 0, v^* > 0$ , such that  $\sum_{r=1}^m u_r^* y_{rp} - \sum_{i=1}^n v_i^* x_{ip} \geq 0$  and  $\sum_{r=1}^m u_r^* y_{rj} - \sum_{i=1}^n v_i^* x_{ij} \leq 0, \forall j \neq p$ . Obviously, in the optimal solution of model (1) for only one  $p \in \{1, 2, \dots, k\}$  we have  $d_p^* = 0$  and  $d_j^* \neq 0, \forall j \neq p$ . In the other words, this model finds a common set of positive optimal weights  $u^* = (u_1^*, u_2^*, \dots, u_m^*)$  and  $v^* = (v_1^*, v_2^*, \dots, v_n^*)$  such that the efficiency score of  $DMU_p$  is equal to one and the efficiency score of other  $DMUs$  are less than one.  $\square$



### 3 Numerical illustration

In this section a real data set of 18 suppliers are used to illustrate the capability and usefulness of the proposed approach. The data set for this example is partially taken from [9] and contains specifications on 18 suppliers. The supplier inputs considered are Total Cost of shipments (TC) and Number of Shipments per month (NS). The outputs utilized in the study are Number of shipments to arrive On Time (NOT) and Number of Bill received from the supplier without errors (NB). Suppose the viewpoint of DM about the weights of criteria is as follows:

$$2 \leq \frac{v_1}{v_2} \leq 3 \quad \& \quad 3 \leq \frac{u_1}{u_2} \leq 4$$

To find the best supplier, first we used the CCR model with the above weight restrictions and solved 18 models to calculate the efficiency scores of 18 suppliers ( $\epsilon = 0.001$ ). The result is given in the last column of table 1. As result shows, supplier 3 is the single most efficient DMU. Solving model (1) by considering  $N = 100, M = 100$ , and  $\epsilon = 0.001$  gives the following result:

$$d_3^* = 0, d_j^* > 0, \forall j \neq 3 \quad \& \quad d^* = 3.158$$

As proved in Theorem 2.1, this solution implies that supplier 3 is the best among 18 suppliers. As it can be seen, our proposed approach solves just one model to find the best DMU, where CCR model solves 18 models to obtain this result.

Table1:Related attributes and efficiency scoreof 18 suppliers

Supplier No DMU	Out put 1 $y_{1j}$	Out put 2 $y_{2j}$	In put 1 $X_{1i}$	In put 2 $X_{2i}$	Efficiency score
1	90	187	197	253	0.823
2	130	194	198	268	0.851
3	200	220	229	259	1
4	100	160	169	180	0.972
5	173	204	212	257	0.942
6	170	192	197	248	0.936
7	60	194	209	272	0.758
8	145	195	203	330	0.735
9	150	200	208	327	0.756
10	90	171	203	330	0.607
11	100	174	207	321	0.638
12	200	209	234	329	0.805
13	163	165	173	281	0.778
14	170	199	203	309	0.812
15	185	188	193	291	0.839
16	85	168	177	334	0.607
17	130	177	185	249	0.849
18	160	167	176	216	0.944

### 4 Conclusion

In this paper a new mixed integer linear DEA model has been proposed to find the most efficient DMU in presence of weight restrictions. It is mathematically proved that the proposed model identifies a single most efficient DMU by solving just one model. The capability and usefulness of the proposed approach is indicated by finding the best supplier among 18 suppliers. It was shown that, our proposed approach solve just one model to find the best supplier. In CCR model, we need to solve at least 18 models to obtain this result.

### References

- [1] Charnes A., Cooper WW, Rhodes E (1978) Measuring the efficiency of decision making units, European Journal of Operational Research. 2 (6): 428 – 444.
- [2] Allen R, Athanassopoulos A, Dyson RG, Thanassoulis E (1997) Weights restrictions and value judgments in data envelopment analysis: evolution, development and future directions. Annals of Operations Research. 73: 13 – 34.



- [3] Khalili et al. (2010) An improvement on the Tracy and Chen model A generalized model for weight restrictions in DEA. *Journal of the Operational Research Society*. 61: 1789 –1793.
- [4] Sexton T. R., SilkmanRH, Hogan AJ (1986) Data envelopment analysis: critique and extensions, in: R.H. Silkman (Ed.), *Measuring Efficiency: An Assessment of Data Envelopment Analysis*, Jossey-Bass, San Francisco, CA, pp. 73–105.
- [5] Andersen P., Petersen NC (1993) A procedure for ranking efficient units in data envelopment analysis. *Management Science*. 39: 1261–1294.
- [6] Foroughi A. A. (2013) A revised and generalized model with improved discrimination for finding most efficient DMUs in DEA. *Applied Mathematical Modelling* 37: 4067–4074.
- [7] Toloo M., (2014) An Epsilon-free Approach for Finding the Most Efficient Unit in DEA. *Applied Mathematical Modelling*.
- [8] Toloo M., (2014) The role of non-Archimedean epsilon in finding the most efficient unit: with an application of professional tennis players. *Applied Mathematical Modelling*.
- [9] Talluri S., Baker RC (2002) A multi-phase mathematical programming approach for effective supply chain design. *European Journal of Operational Research* 141 (3): 544–558.

# روشی نو برای حل مسائل برنامه ریزی خطی با پارامترهای تصادفی بازه ای

زیبا ارجمندزاده\*، دانشجوی دکترا گروه ریاضی، دانشگاه سمنان، ziba.arjmandzadeh@gmail.com

محمدرضا صافی، عضو هیأت علمی گروه ریاضی، دانشگاه سمنان، msafi@profs.semnan.ac.ir

**چکیده:** در این مقاله ابتدا رده جدیدی از مسایل برنامه ریزی ریاضی را در حالتی که پارامترهای مساله به صورت متغیرهای تصادفی بازه ای هستند معرفی می کنیم. این مسایل شامل دو نوع متفاوت ابهام در پارامترهای مساله هستند که عبارتند از بازه ای بودن و تصادفی بودن. برای حل این مسایل از روش امید ریاضی برای مسایل تصادفی استفاده می کنیم. روش مورد نظر به این صورت است که ابتدا پارامترهای مساله را از حالت بازه ای بودن با استفاده از روش های موجود خارج می کنیم. مساله مورد نظر به فرم یک مساله فقط تصادفی در می آید. در نهایت مساله تصادفی نهایی را به کمک مدل امید ریاضی حل می کنیم.

**کلمات کلیدی:** برنامه ریزی تصادفی بازه ای، متغیر تصادفی، امید ریاضی، تابع توزیع احتمال.

## مقدمه

آقای مور مطالعات گسترده ای را در زمینه محاسبات بازه ای انجام دادند [3], [4], [5].

ما در این مقاله تصمیم داریم رده جدیدتری از مسایل با پارامترهای مبهم را بررسی کنیم. برای این منظور ابتدا این رده از مسایل را تحت عنوان مسایل برنامه ریزی خطی تصادفی بازه ای، به طور کامل معرفی کرده و روش حلی مبتنی بر امید ریاضی برای این مسایل ارائه دهیم.

## مفاهیم اولیه

در این بخش بعضی از تعاریف اولیه مورد نیاز را به اختصار بیان می کنیم:

متغیر تصادفی: فرض کنید  $\Omega$  فضای نمونه ای یک آزمایش تصادفی باشد. متغیر تصادفی، تابعی است که به هر عضو از  $\Omega$  عددی حقیقی را نسبت می دهد.

توزیع احتمال یک متغیر تصادفی: فرض کنید  $\Psi$  یک متغیر تصادفی باشد. توزیع احتمال آن تابعی است که

یکی از مراحل مدل سازی برنامه ریزی خطی، فرمول بندی مساله است که بخشی از آن جمع آوری داده ها و مطالعه تفصیلی آن می باشد. به دلیل پیچیدگی مسائل جهان واقعی، مشکلاتی در جمع آوری داده ها به چشم می خورد. از این رو شاخه های متعددی برای بررسی این گونه مسائل ایجاد شده اند. مهمترین این شاخه ها عبارتند از: برنامه ریزی فازی، برنامه ریزی تصادفی و برنامه ریزی بازه ای. در تمامی این شاخه ها هدف در برنامه ریزی ملحوظ داشتن اثر پارامترهای غیرقطعی در رابطه با جواب مدلی است که ساخته می شود.

تاکنون در زمینه مدل سازی و حل مسائل غیر قطعی مطالعات بسیاری انجام شده است. برای مثال آلفلد و هرزبرگر [1] مطالعات گسترده ای را در زمینه مدل های بازه ای انجام داده اند. همچنین پیتزکل و والیس [2] در سال ۱۹۹۴ در کتابی با عنوان برنامه ریزی تصادفی، به بررسی مدل های تصادفی پرداخته و روش های گوناگونی را برای حل این مدل ها ارائه دادند. همچنین

$$\begin{aligned}
 \min \quad & f(x) = \widehat{c}_1 x_1 + \widehat{c}_2 x_2 + \dots + \widehat{c}_n x_n \\
 & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \geq b_1 \\
 \text{s.t.} \quad & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \geq b_2 \\
 & \vdots \\
 & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \geq b_m
 \end{aligned}$$

در مساله فوق پارامترهای تابع هدف متغیرهای تصادفی بازه ای هستند. همانطور که در صورت مساله دیده می شود از نماد - برای بازه ای بودن و از نماد  $\wedge$  برای نشان دادن فاکتور تصادفی بودن استفاده می شود. یعنی داریم:

$$\widehat{c}_i = [\widehat{c}_i^l, \widehat{c}_i^u]$$

که در آن  $\widehat{c}_i^l$  و  $\widehat{c}_i^u$  توابعی اندازه پذیر هستند و همواره داریم  $\widehat{c}_i^l \leq \widehat{c}_i^u$ .

به دلیل بازه ای بودن پارامترهای تابع هدف، مقدار بهینه تابع هدف به صورت یک بازه بدست می آید. کران بالا برای بازه بهینه را با  $\bar{f}$  و کران پائین بازه بهینه را با  $\underline{f}$  نشان می دهیم.

قضیه (Vajda, 1961): برای هر مساله برنامه ریزی بازه ای رابطه زیر برقرار است:

$$\begin{aligned}
 \underline{f} &= \min^T x \quad \text{subject to} \quad Ax \leq b, x \geq 0, \\
 \bar{f} &= \max^T x \quad \text{subject to} \quad Ax \leq b, x \geq 0
 \end{aligned}$$

با استفاده از قضیه فوق کران های بالا و پائین مقدار بهینه را برای مساله برنامه ریزی خطی تصادفی بازه ای به صورت زیر بدست می آوریم:

$$\begin{aligned}
 \underline{f}(x) &= \min \quad \widehat{c}_1^l x_1 + \widehat{c}_2^l x_2 + \dots + \widehat{c}_n^l x_n \\
 & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \geq b_1 \\
 \text{s.t.} \quad & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \geq b_2 \\
 & \vdots \\
 & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \geq b_m
 \end{aligned}$$

و کران بالا برای بازه بهینه به صورت زیر بدست می

$$f: R \mapsto [0, 1]$$

$$\begin{cases} f(\psi) = P(\Psi^{-1}(\psi)) & \forall \psi \in R \text{ (گسسته)} \\ f(A) = \int_A f(\psi) d\psi & \forall A \subseteq R \text{ (پیوسته)} \end{cases}$$

امید ریاضی متغیر تصادفی: فرض کنید  $\Psi$  یک متغیر تصادفی گسسته (پیوسته) باشد و  $f(\psi)$  مقدار توزیع احتمال (چگالی احتمال) آن به ازای  $\psi$  باشد در این صورت امید ریاضی آن به صورت زیر تعریف می شود:

$$E(\Psi) = \begin{cases} \sum_{\psi \in \Psi(\Omega)} \psi f(\psi) & \xi \text{ گسسته است} \\ \int_{-\infty}^{\infty} \psi f(\psi) d\psi & \xi \text{ پیوسته است} \end{cases}$$

امید ریاضی (مقدار مورد انتظار یا میانگین) برای توصیف تمایل مرکزی یک متغیر تصادفی به کار می رود.

متغیرهای بازه ای: در حالت کلی یک متغیر بازه ای حقیقی مقدار به صورت زیر تعریف می شود:

$$Interval := [x] = [x^l, x^u] = \{x : x^l \leq x \leq x^u\}.$$

تابع بازه ای: فرض کنید  $T \subseteq R$  و  $f^l: T \rightarrow R$  و  $f^u: T \rightarrow R$  دو تابع حقیقی مقدار باشند که در شرط  $f^l(x) \leq f^u(x)$  برای هر  $x \in T$ ، صدق می کنند. یک تابع بازه ای  $f: T \rightarrow IR$  به صورت  $f(t) = [f^l(t), f^u(t)]$  تعریف می شود. عملگرهای مختلفی از جمله عملگرهای انتگرال گیری، مشتق گیری و ... را می توان روی توابع بازه ای تعریف کرد.

فرض کنید  $(\Omega, \Upsilon, P)$  یک فضای احتمال باشد. یک بازه تصادفی  $[\xi]$  تابعی است که توسط یک جفت از توابع  $\xi -$  اندازه پذیر  $\xi^l, \xi^u: \Omega \rightarrow R$  مشخص می شود که در آن داریم  $\xi^l \leq \xi^u$  (تقریباً همه جا).

## مساله برنامه ریزی خطی با پارامترهای تصادفی بازه ای

یک مساله برنامه ریزی خطی با پارامترهای تابع هدف تصادفی بازه ای، در حالت کلی به صورت زیر تعریف

مساله فوق بوضوح یک مساله برنامه ریزی خطی با

پارامترهای قطعی است که براحتی می توان آن را از روش هایی همچون سیمپلکس حل کرد. بنابراین بازه پیشنهادی به عنوان بازه بهینه به صورت زیر بدست می آید:

$$f^* = [E(\underline{f})^*, E(\bar{f})^*]$$

## نتایج

در این مقاله رده جدیدی از مسائل برنامه ریزی خطی با پارامترهای مبهم را مورد بررسی قرار دادیم. این مسائل شامل پارامترهایی به صورت متغیرهای بازه ای تصادفی هستند که کاربردهای زیادی در علوم و صنعت دارند. برای حل این مسائل ابتدا با یکی از روش های بازه ای حالت بازه ای بودن را رفع ابهام کرده و مدل تصادفی حاصل را با روش امید ریاضی حل کردیم.

## مراجع

- [1] G. Alefeld and J. Herzberger: *Introduction to Interval Computation*, Academic Press, 1983.
- [2] P. Kall and S. W. Wallace: *Stochastic Programming*, JOHN WILEY and SONS, 1994.
- [3] R. E. Moore: *Interval Arithmetic and Automatic Error Analysis in Digital Computing*, PhD thesis, Stanford University, October 1962.
- [4] R. E. Moore: *Interval Analysis*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, October 1966.
- [5] R. E. Moore, *Methods and Application of Interval Analysis*, SIAM Philadelphia, 1979.

$$\bar{f}(x) = \max \hat{c}_1^u x_1 + \hat{c}_2^u x_2 + \dots + \hat{c}_n^u x_n$$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \geq b_1$$

$$s.t. \quad a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \geq b_2$$

⋮

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \geq b_m$$

بوضوح هر دو مساله فوق مسایل برنامه ریزی خطی هستند که در آن ها ضرایب تابع هدف متغیرهای تصادفی می باشند. برای حل مسایل فوق از روش امید ریاضی استفاده می کنیم یعنی بجای بهینه کردن تابع هدف با پارامترهای تصادفی، امید ریاضی توابع هدف را بهینه می کنیم. از آنجا که امید ریاضی یک تابع خطی است می توان نتایج زیر را بدست آورد:

$$E(\underline{f})(x) = \min E(\hat{c}_1^l)x_1 + E(\hat{c}_2^l)x_2 + \dots + E(\hat{c}_n^l)x_n$$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \geq b_1$$

$$s.t. \quad a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \geq b_2$$

⋮

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \geq b_m$$

و

$$E(\bar{f})(x) = \max E(\hat{c}_1^u)x_1 + E(\hat{c}_2^u)x_2 + \dots + E(\hat{c}_n^u)x_n$$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \geq b_1$$

$$s.t. \quad a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \geq b_2$$

⋮

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \geq b_m$$



# Dynamic DEA with network structure: A slacks-based measure approach for fuzzy data

A. Ashrafi\*, Faculty of Mathematics, Statistics and Computer Science, Semnan University, Semnan, Iran,  
a.ashrafi@profs.semnan.ac.ir

Mozhgan Mansouri Kaleibar\*

Ph. D. student, Faculty of Mathematics, Statistics and Computer Science, Semnan University, Semnan, Iran,  
Mozhganmansouri953@gmail.com.

---

**Abstract:** We propose a dynamic DEA model involving network structure in each period for fuzzy data within the framework of a slacks-based measure approach. In this paper we deal with multiple divisions connected by links of network structure with in each period for fuzzy data. This model compute, the overall efficiency over the entire observed period, dynamic change of period efficiency and dynamic change of divisional efficiency. The model can be implemented in input-, output-or non-(both) oriented forms under the CRS or VRS assumptions on the production possibility set.

**Keywords:** Dynamic DEA, Network DEA, SBM, fuzzy Data.

---

## 1 INTRODUCTION

Traditional DEA (data envelopment analysis) models deal with measurements of relative efficiency of decision making units (DMUs) regarding multiple inputs vs. multiple outputs [?, ?]. One of the drawbacks of these models is the omission of the internal structure of the DMUs. To reflect the actual world, the network DEA model was developed to take into account the internal structure of DMUs using link variables. In addition, companies' activity generally continues across multiple periods. The dynamic DEA model was developed to evaluate DMUs performance from a long-term perspective using carry-over variables. We propose a model combining these two developed models, resulting in dynamic and network DEA with fuzzy data. This combined model enables us not only to obtain the

overall efficiency of DMUs over the entire observed period, but also to conduct further analysis, that is, observing dynamic change of the period efficiency and dynamic change of the divisional efficiency of DMUs.

## 2 SBM formulation for dynamic DEA with network structure

In this section, we define the dynamic SBM with network structure (DNSBM) and formulate it as a programming problem.

---

\*Corresponding Author



## 2.1 Notations

We deal with  $n$  DMUs ( $j = 1 \dots n$ ) consisting of  $K$  divisions ( $k = 1 \dots K$ ) Over  $T$  time periods ( $t = 1 \dots T$ ). Let  $m_k$  and  $r_k$  be the numbers of inputs and outputs to division  $k$ , respectively. We denote the link leading from division  $k$  to division  $h$  by  $(k, h)_l$  and the set of links by  $l_{kh}[\cdot]$ .

## 3 The DNSBM model with fuzzy data

In this section, we define the dynamic SBM with network structure (DNSBM) and formulate it as a programming problem for fuzzy data.

### 3.1 Notations

We define the observed data as follows.

#### Inputs and outputs

(a)  $\tilde{x} \in R_+(i = 1, \dots, m_k; j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, K; t = 1, \dots, T)$  is input resource  $i$  to DMUj

for division  $k$  in period  $t$ , and  $\tilde{y}_{rjk}^t \in R_+(r = 1, \dots, r_k; j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, K; t = 1, \dots, T)$  is output product  $r$  from DMUj, division  $k$ , in period  $t$ . If some outputs are undesirable, we treat them as inputs to division  $k$ .

Where  $\tilde{x}_{ijk}^t, \tilde{y}_{rjk}^t$  is triangular fuzzy number, in this paper, we employ a parametric approach to solving the linear programming problem with fuzzy parameters [?].

(b) Links

$z_{j(kh)l}^t \in R_+(j = 1, \dots, n; l = 1, \dots, L_{kh}; t = 1, \dots, T)$  is linking inter-mediate products of DMUj from division  $k$  to division  $h$  in period  $t$ , where  $L_{kh}$  is the number of items in links from  $k$  to  $h$ .

(c) Carry-overs

$z_{jkl}^{(t,t+1)} \in R_+(j = 1, \dots, n; l = 1, \dots, l_k; k = 1, \dots, K; t = 1, \dots, T-1)$  is carry-over of DMUj, at division  $k$ , from period  $t$  to period  $t+1$ , where  $l_k$  is the number of items in the carry-over from division  $k$  [?].

First, we obtain the overall efficiency  $\theta_0^*$ . Then we minimize period efficiency in  $T$  while keeping the overall efficiency at  $\theta_0^*$ . Let us denote the period efficiency in  $T$  thus obtained by  $\tau_0^{T*}$ .

$$\tau_0^{T*} = \min \frac{\sum_{k=1}^K w^k \left[ 1 - \frac{1}{m_k + \text{linkin}_k + \text{nbad}_k} \left( \sum_{i=1}^{m_k} \frac{S_{iok}^{T-}}{\tilde{x}_{iok}^T} + \sum_{(kh)_l=1}^{\text{linkin}_k} \frac{S_{o(kh)_l \text{in}}^T}{z_{o(kh)_l \text{in}}^T} + \sum_{k_l=1}^{\text{nbad}_k} \frac{S_{ok_l \text{bad}}^{(T,T+1)}}{z_{ok_l \text{bad}}^{(T,T+1)}} \right) \right]}{\sum_{k=1}^K w^k \left[ 1 + \frac{1}{r_k + \text{linkout}_k + \text{ngood}_k} \left( \sum_{i=1}^{r_k} \frac{S_{iok}^{T+}}{\tilde{y}_{iok}^T} + \sum_{(kh)_l=1}^{\text{linkout}_k} \frac{S_{o(kh)_l \text{out}}^T}{z_{o(kh)_l \text{out}}^T} + \sum_{k_l=1}^{\text{ngood}_k} \frac{S_{ok_l \text{good}}^{(T,T+1)}}{z_{ok_l \text{good}}^{(T,T+1)}} \right) \right]}$$

Subject to

$$\frac{\sum_{t=1}^T w^t \left[ \sum_{k=1}^K w^k \left[ 1 - \frac{1}{m_k + \text{linkin}_k + \text{nbad}_k} \left( \sum_{i=1}^{m_k} \frac{S_{iok}^{t-}}{\tilde{x}_{iok}^t} + \sum_{(kh)_l=1}^{\text{linkin}_k} \frac{S_{o(kh)_l \text{in}}^t}{z_{o(kh)_l \text{in}}^t} + \sum_{k_l=1}^{\text{nbad}_k} \frac{S_{ok_l \text{bad}}^{(t,t+1)}}{z_{ok_l \text{bad}}^{(t,t+1)}} \right) \right] \right]}{\sum_{t=1}^T w^t \left[ \sum_{k=1}^K w^k \left[ 1 + \frac{1}{r_k + \text{linkout}_k + \text{ngood}_k} \left( \sum_{i=1}^{r_k} \frac{S_{iok}^{t+}}{\tilde{y}_{iok}^t} + \sum_{(kh)_l=1}^{\text{linkout}_k} \frac{S_{o(kh)_l \text{out}}^t}{z_{o(kh)_l \text{out}}^t} + \sum_{k_l=1}^{\text{ngood}_k} \frac{S_{ok_l \text{good}}^{(t,t+1)}}{z_{ok_l \text{good}}^{(t,t+1)}} \right) \right] \right]}$$

Where  $\tilde{x}_{ijk}^t, \tilde{y}_{rjk}^t$  is triangular fuzzy number, in this paper, we employ a parametric approach to solving the linear programming problem with fuzzy parameters [?]. First we introduce the  $\alpha$ -level of the fuzzy

number  $\tilde{x}_{ijk}^t, \tilde{y}_{rjk}^t$  defined as the set  $(\tilde{x}_{ijk}^t)_\alpha, (\tilde{y}_{rjk}^t)_\alpha$  in which the degree of their membership functions exceeds the level  $\alpha$ :



$$\begin{aligned}(\tilde{x}_{ijk})_\alpha &= \left\{ (\tilde{x}_{ijk}^t) \mu_{\tilde{x}_{ijk}^t}(x_{ijk}^t) \geq \alpha, k = 1, \dots, K, j = 1, \dots, n, t = 1, \dots, T \right\} \\ (\tilde{y}_{rjk})_\alpha &= \left\{ (\tilde{y}_{rjk}^t) \mu_{\tilde{y}_{rjk}^t}(x_{ijk}^t) \geq \alpha, k = 1, \dots, K, j = 1, \dots, n, t = 1, \dots, T \right\}\end{aligned}$$

Now suppose that all inputs and outputs consider that the degree of all the membership functions of the fuzzy number involved in the linear programming problem should be greater than or equal to a certain degree  $\alpha$ . Then, for such a degree  $\alpha$ , the

problem can be interpreted as the following non fuzzy linear programming problem which depends on a coefficient vector  $(x_{ijk}^t) \in (\tilde{x}_{ijk}^t)_\alpha, (y_{rjk}^t) \in (\tilde{y}_{rjk}^t)_\alpha$  [?].

$$\tau_0^{T*} = \min \frac{\sum_{k=1}^K w^k \left[ 1 - \frac{1}{m_k + \text{linkin}_k + \text{nbad}_k} \left( \sum_{i=1}^{m_k} \frac{S_{iok}^{T-}}{x_{iok}^{Rt}} + \sum_{(kh)_l=1}^{\text{linkin}_k} \frac{S_{o(kh)_l \text{in}}^T}{z_{o(kh)_l \text{in}}^t} + \sum_{k_l=1}^{\text{nbad}_k} \frac{S_{ok_l \text{bad}}^{(T,T+1)}}{z_{ok_l \text{bad}}^{(T,T+1)}} \right) \right]}{\sum_{k=1}^K w^k \left[ 1 + \frac{1}{r_k + \text{linkout}_k + \text{ngood}_k} \left( \sum_{i=1}^{r_k} \frac{S_{iok}^{T+}}{y_{iok}^{Rt}} + \sum_{(kh)_l=1}^{\text{linkout}_k} \frac{S_{o(kh)_l \text{out}}^T}{z_{o(kh)_l \text{out}}^t} + \sum_{k_l=1}^{\text{ngood}_k} \frac{S_{ok_l \text{good}}^{(T,T+1)}}{z_{ok_l \text{good}}^{(T,T+1)}} \right) \right]}$$

Subject to

$$\begin{aligned}& \sum_{t=1}^t w^t \left[ \sum_{k=1}^K w^k \left[ 1 - \frac{1}{m_k + \text{linkin}_k + \text{nbad}_k} \left( \sum_{i=1}^{m_k} \frac{S_{iok}^{T-}}{x_{iok}^{Rt}} + \sum_{(kh)_l=1}^{\text{linkin}_k} \frac{S_{o(kh)_l \text{in}}^t}{z_{o(kh)_l \text{in}}^t} + \sum_{k_l=1}^{\text{nbad}_k} \frac{S_{ok_l \text{bad}}^{(t,t+1)}}{z_{ok_l \text{bad}}^{(t,t+1)}} \right) \right] \right] \\ & \sum_{t=1}^t w^t \left[ \sum_{k=1}^K w^k \left[ 1 + \frac{1}{r_k + \text{linkout}_k + \text{ngood}_k} \left( \sum_{i=1}^{r_k} \frac{S_{iok}^{t+}}{y_{iok}^{Rt}} + \sum_{(kh)_l=1}^{\text{linkout}_k} \frac{S_{o(kh)_l \text{out}}^t}{z_{o(kh)_l \text{out}}^t} + \sum_{k_l=1}^{\text{ngood}_k} \frac{S_{ok_l \text{good}}^{(t,t+1)}}{z_{ok_l \text{good}}^{(t,t+1)}} \right) \right] \right]\end{aligned}$$

## 4 Conclusions

In this paper we have developed a dynamic DEA model with network structure (DNSBM) with fuzzy data as a composition of the dynamic SBM (DSBM) and the network SBM (NSBM).

## 5 Reference

### References

- [1] I. Nishizaki, M. Sakawa, *Solution based on fuzzy goals in fuzzy linear programming games*, Fuzzy Sets and System, Vol. 115, pp. 105-119, 2000.
- [2] K. Nakabayashi, K. Tone, *Egoist's dilemma: a DEA game*, The International of Management Science, Vol. 36, pp.135- 148, 2006.
- [3] Chen CM. *Network DEA: a model with new efficiency measure to incorporate the dynamic effect in production networks*, European Journal of Operational Research 2009;194(3):687-99.
- [4] Cook WD, LiangL, ZhuJ. *Measuring performance of two-stage network structures by DEA: a review and future perspective*, Omega 2010;38:423-30.
- [5] Kao C. *Network data envelopment analysis: current development and future research*, Asia-Pacific Productivity Conference (APPC);July2008.



# Optimal Error Correction of the Absolute Value Equation

Hossein Moosaei\*, Department of Mathematics, Faculty of Science,  
University of Bojnord, Bojnord, Iran. hmoosaei@gmail.com

Saed Ketabchi, Department of Applied Mathematics, Faculty of Mathematical Sciences,  
University of Guilan, Rasht, Iran. sketabchi@guilan.ac.ir

**Abstract:** In this paper, we have studied the optimum correction of absolute value equation (AVE) through making minimal changes in the coefficient matrix and the right hand side using  $l_2$  norm. Solving this problem is equal to solving a nonconvex and fractional quadratic problem. We change the fractional problem to a quadratic constrained problem which is similar to the trust region subproblem. We apply the bisection method to the aforesaid problem and managed to solve the fractional programming problem.

**Keywords:** Absolute value equation, Fractional programming, Trust region subproblem.

## 1 INTRODUCTION

Many mathematical programming problems can be reduced to the NP-hard linear complementarity problem (LCP) which is equivalent to an absolute value equation. The absolute value equations (AVE) can be stated as follows:

Given a real  $n \times n$  matrix  $A$  and real  $n$ -vector  $b$ , find a real  $n$ -vector  $x$  such that

$$Ax - |x| = b, \quad (1.1)$$

where  $|x|$  denotes the component-wise absolute value of vector  $x \in R^n$ .

If it is solvable, it can have either unique solution or multiple (e.g., exponentially many) solutions [?].

But in many obtained models, we often encounter problems which present as systems of infeasible absolute value equation. We could argue numerous reasons for the infeasibility of a AVE system, including error in data, errors in modeling,

and many other situations. The remodeling of this system and finding its errors might take remarkable time and expenses, and also we might eventually get to an infeasible system again we do not do so. We therefore focus on an optimal correction of the given system. In fact, we would like to reach the feasible systems with the least changes in data. The correction of infeasible AVE where the coefficient matrices are rank deficient considered in [?]. In this paper we will study correction of the infeasible AVE where the coefficient matrices are full rank.

In order to make the above-mentioned system feasible, we apply the changes simultaneously in the entries of the matrix  $A$  and the right-hand side vector  $b$ , and in order to correct system (??), we respectively need to solve following fractional and quadratic problem, not necessarily the convex

\*Corresponding Author



ones :

$$\min_{x \in R^n} \frac{\|Ax - |x| - b\|^2}{1 + \|x\|^2}. \quad (1.2)$$

Sometimes solving the above-mentioned problem leads to solutions with very large norms which are practically impossible to use. To control over the norm of the solution vector, we usually use two methods. (i) Tikhonov regularizing of problems, where a quadratic penalty is appended to the unconstrained quadratic fractional problem [?], and (ii) regularized least squares method - which is a well-studied approach for the unconstrained quadratic fractional problem - where a quadratic constraint bounding the size of the solution is added [?]. So instead of problem (??), we could deal with the following ones:

$$\begin{aligned} \min_{x \in R^n} \frac{\|Ax - |x| - b\|^2}{1 + \|x\|^2} \\ \text{s.t.} \quad \|x\|^2 \leq \beta. \end{aligned} \quad (1.3)$$

This article focuses on studying the problem (??).

## 2 MAIN RESULTS

First, we consider the following minimization problem:

$$\min_x \min_{E,r} (\|E\|^2 + \|r\|^2), \quad \text{s.t.} \quad (A + E)x - |x| = b + r, \quad (2.1)$$

where  $A \in R^{n \times n}$ ,  $b \in R^n$  and  $E \in R^{n \times n}$  is a perturbation matrix and  $r \in R^n$  is a perturbation vector.

The problem (??) is a nonconvex problem and to solve it, we consider the following inner minimization problem

$$\min_{E,r} (\|E\|^2 + \|r\|^2), \quad \text{s.t.} \quad (A + E)x - |x| = b + r, \quad (2.2)$$

which is a constrained convex problem.

**Theorem 2.1.** Suppose that  $(E^*, r^*)$  denotes the optimal pair to the problem (??). Then

$$r^* = \frac{Ax^* - |x^*| - b}{1 + \|x^*\|^2}, \quad E^* = -\frac{Ax^* - |x^*| - b}{1 + \|x^*\|^2} x^{*T},$$

where  $x^*$  is an optimal solution of  $\min_x \frac{\|Ax - |x| - b\|^2}{1 + \|x\|^2}$ .

Above fractional problem can be formulated as a double minimization problem in the following way:

$$\min_{\beta \geq 0} \min_{\|x\|^2 = \beta^2} \frac{\|Ax - |x| - b\|^2}{1 + \beta^2}.$$

or

$$\min_{\beta \geq 0} G(\beta)$$

where

$$G(\beta) = \min_{\|x\|^2 = \beta^2} \frac{\|Ax - |x| - b\|^2}{1 + \beta^2}$$

Calculating function values of  $G$  requires solving a minimization problem with a quadratic objective function and a norm equality constraint.

Therefore, we consider the following minimization problem:

$$\begin{aligned} \min \|Ax - |x| - b\|^2 \\ \|x\|^2 = \beta^2 \end{aligned} \quad (2.3)$$

Let  $|x| = D(x)x$  and  $A - D(x) = S$  then the problem (??) reduced to

$$\begin{aligned} \min_x x^T Q x + g^T x + b^T b \\ \|x\|^2 = \beta^2, \end{aligned} \quad (2.4)$$

where  $Q = S^T S$ ,  $g = -2S^T b$ .

**Theorem 2.2.** The vector  $x^*$  is the solution of (??) if and only if there is a scalar  $\lambda$  such that:

$$\begin{aligned} 0 &\in (Q + \lambda I)x^* + g \\ \|x^*\| &= \beta \\ Q + \lambda I &\succeq 0. \end{aligned}$$

**Theorem 2.3.** *Function  $G(\beta)$  has the following properties:*

1.  $G(\beta)$  is continuous in  $[0 \ 1 + \alpha]$ .
- 2.

$$G'(\beta) = \frac{-2\lambda\beta}{1 + \beta^2} - \frac{2\beta\|Ax(\beta) - |x(\beta)| - b\|^2}{(1 + \beta^2)^2}.$$

**Lemma 2.4.**  $G(\beta)$  is strictly unimodal.

Then we can use bisection method to solve it. Because the function  $G$  is unimodal, then bisection method does necessarily converge to a global minimum.

### 3 Reference

#### References

- [1] A. Beck, and A. Ben-Tal, *On the solution of the Tikhonov regularization of the total least squares problem*, SIAM J. Optim. 17 (2006), no. 1, 98-118.
- [2] S. Ketabchi and H. Moosaei, *Minimum Norm Solution to the Absolute Value Equation in the Convex Case*, J. Optim. Theory Appl. 154 (2012), no. 3 , 1080-1087.
- [3] S. Ketabchi and H. Moosaei, *Optimal Error Correction and Methods of Feasible Directions*, J. Optim. Theory Appl. 154 (2012), no. 1 , 209-216.





# Recurrent Neural Network for Solving Multi-Extremal Mathematical Programming Problems

N. H. Mahani\*, Ph. D. student of Department of Applied Mathematics,

Faculty of Mathematical Sciences, Tarbiat Modares University, n.mahani@modares.ac.ir

A. Malek, Academic member of Department of Applied Mathematics,

Faculty of Mathematical Sciences, Tarbiat Modares University, P.O. Box 14115-134, mala@modares.ac.ir

**Abstract:** In this paper, we propose a projection neural network model for solving multi-extremal nonconvex mathematical programming problems which may have many local minimizers that are not global. This neural network is designed based on the Kuhn-Tucker necessary conditions and sufficiency conditions for multi-extremal nonconvex problems. Simulation results are given to illustrate the global convergence and performance of the proposed model for multi-extremal nonconvex optimization problems.

**Keywords:** Smooth nonlinear programming problems; Global optimization; Recurrent neural network; Kuhn-Tucker conditions; Multi-extremal programming problem.

## 1 INTRODUCTION

Consider the following mathematical programming problems (NQPP):

$$\begin{aligned} \min & f(x) \\ \text{s.t.} & g_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m, \\ & x \in \prod_{i=1}^n [u_i, v_i]. \end{aligned} \quad (1)$$

where  $f$ ,  $g_i$  are twice continuously differentiable functions on an open subset of  $R^n$  containing  $D := \prod_{i=1}^n [u_i, v_i]$ ,  $u_i, v_i \in R$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Problems of the form (1) are common in multi-extremal programming problems which may have several local minimizers that are not global. Locating a global minimizer of a multi-extremal nonconvex function with several local minimizers is inherently difficult. If a feasible point  $x^*$  is a local minimizer of (1) and if a certain constraint qualification holds then the

following Kuhn-Tucker conditions hold at  $x^*$  with multiplier  $\lambda \in R_+^m$  for all  $x \in D$ :

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(x^*) = 0 \quad \text{and} \quad \nabla L(x^*, \lambda)(x - x^*) \geq 0, \quad (2)$$

where  $L(x, \lambda)$  is the Lagrangian associated with (1). The Kuhn-Tucker necessary conditions for the local optimality at  $x^*$  become necessary and sufficient for the global optimality at  $x^*$  whenever (1) is a convex programming problem. Various generalized convexity conditions such as pseudo-convexity and quasi-convexity have been given in the literature for a Kuhn-Tucker point to be a global minimizer of a nonlinear programming problem and they often apply to problems where a local minimum is global. This property, known as Kuhn-Tucker sufficiency of global optimality of (1), not hold for a general nonconvex problem (1). Jeyaku-

\*Corresponding Author



mar et al. [4] derived the optimality conditions for (1) by first constructing weighted sum of square underestimators of the objective function of (1) and then by characterizing the global optimality of the underestimators. In this paper, we focus on proposing a recurrent neural network model for solving multi-extremal programming problem (1). We first establish a relationship between problem (1) and mixed nonlinear complementarity problems, then we propose a projection neural network model to transfer the multi-extremal nonconvex programming problem (1) into a specific dynamic system of the first order differential equations.

## 2 Description of the Method

In this section, we begin by presenting basic definitions and notations that will be used throughout the paper. In what follows,  $\|\cdot\|$  denotes  $l_2$ -norm of  $R^n$ . If a function  $g : R^n \rightarrow R$ , then  $\nabla g(x) \in R^n$  and  $\nabla^2 g(x) \in R^{n \times n}$  stand for its gradient and the Hessian at  $x$ . vectors  $x, y \in R^n, x \geq y$  means that  $x_i \geq y_i$ , for  $i = 1, \dots, n$ . The notation  $A \succeq 0$  means that the matrix  $A$  is positive semi-definite. Let  $S = \{x \in R^{n+1} | g(x) \leq 0\}$  and  $\Delta = D \cap S$ .

**Definition 2.1.** Let  $\Omega$  be a closed convex set in  $R^n$ . Then for each  $x \in R^n$ , there exists a unique point  $y \in \Omega$  such that  $\|x - y\| \leq \|x - z\|$ ,  $\forall z \in \Omega$ . The projection of  $x$  on the set  $\Omega$  with respect to Euclidean norm is  $y = P_\Omega(x) = \arg \min_{z \in \Omega} \|x - z\|$ .

**Definition 2.2.** A nonlinear mixed complementarity problem is to find a point  $x \in R^n$  such that

$$MNCP(F) : \begin{cases} x_i F_i(x) = 0, & F_i(x) \geq 0, & x_i \geq 0, & \forall i \in I \\ F_i(x) = 0, & & & \forall i \in N \setminus I. \end{cases}$$

where  $F$  is a continuously differentiable mapping from  $X = \{x \in R^n | x_i \geq 0, i \in I\}$  into  $R^n$ ,  $N = \{1, 2, \dots, n\}$  and  $I \subseteq N$ .

**Lemma 2.3.** [5] The KuhnTucker condition (2) at  $x^*$  is equivalent to

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(x^*) = 0 \text{ and } \bar{\chi}_i(\nabla L(x^*, \lambda))_i \leq 0, \quad i = 1, \dots, n$$

where

$$\bar{\chi}_i = \begin{cases} -1 & \text{if } x_i^* = u_i, \\ 1 & \text{if } x_i^* = v_i, \\ (\nabla L(x^*, \lambda))_i & \text{if } x_i^* \in (u_i, v_i). \end{cases}$$

**Theorem 2.4.** [4] Let  $x^*$  be a feasible point of (1) at which Kuhn-Tucker conditions hold with the multiplier  $\lambda$ . If for each  $x \in D$ ,

$$\nabla^2 \bar{L}(x, \lambda) = \nabla^2 L(x, \lambda) + \text{diag}\left(\frac{-2\bar{\chi}_1(\nabla L(x^*, \lambda))_1}{(v_1 - u_1)}, \dots, \frac{-2\bar{\chi}_n(\nabla L(x^*, \lambda))_n}{(v_n - u_n)}\right) \succeq 0, \quad (3)$$

then  $x^*$  is a global minimizer of (1). Moreover, if, for each  $x \in D$ ,  $\nabla^2 \bar{L}(x, \lambda) \succ 0$  then  $x^*$  is unique.

**Lemma 2.5.** Let  $y^* = ((x^*)^T, \lambda^T)^T$  be a solution of  $MNCP(G)$ , where  $G : \Gamma \rightarrow R^{n+m}$  is defined by

$$G(y) = \begin{pmatrix} \nabla_x f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla_x g_i(x) \\ -g_1(x) \\ \vdots \\ -g_m(x) \end{pmatrix} \quad (4)$$

For  $\Gamma = \{y = (x^T, \lambda^T)^T | x \in \Delta, \lambda \geq 0\}$ . Then  $x^*$  is a local minimizer of (1).

**Theorem 2.6.** [2]  $y^* \in \Gamma$  is a solution of  $MNCP(G)$  if and only if it is a solution of

$$y^* = P_\Gamma(y^* - G(y^*)) \quad (5)$$

Combining the above two theorems, we propose a method which is constructed by using the procedure below:

*Step 1:* Find a solution of  $MNCP(G)$ . Let the neural network model for solving  $MNCP(G)$  be represented by the following dynamic systems:

$$\frac{dy}{dt} = \begin{pmatrix} P_D(x - (\nabla_x f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla_x g_i(x))) - x \\ (\lambda_1 + g_1(x))^+ - \lambda_1 \\ \vdots \\ (\lambda_m + g_m(x))^+ - \lambda_m \end{pmatrix}. \quad (6)$$

*Step 2:* Calculate the matrix  $\nabla^2 L(x, \lambda) + Q$  where  $Q = \text{diag}(\frac{-2\bar{\chi}_1(\nabla L(x^*, \lambda))_1}{(v_1 - u_1)}, \dots, \frac{-2\bar{\chi}_n(\nabla L(x^*, \lambda))_n}{(v_n - u_n)})$  and  $((x^*)^T, \lambda^T)^T$  is a solution of  $MNCP(G)$ .

*Step 3:* If  $\nabla^2 L(x, \lambda) + Q \succeq 0$ , then  $x^*$  is a global minimizer of (1), else  $x^*$  is a local minimizer of (1).



**Theorem 2.7.** [1] For any initial point  $y(t_0) = y_0 \in R^{n+m}$  there exists a unique solution  $y(t)$  for the proposed neural network model.

**Theorem 2.8.** A neural network derived from the proposed method is Lyapunov stable at each equilibrium point and globally convergent to a global minimizer of (1).

### 3 Numerical Example

In order to demonstrate the effectiveness and performance of the proposed method in solving multi-extremal nonconvex programming problems, we give one illustrative example in this section. The simulation is conducted in MATLAB.

**Example 3.1.** Consider the quadratic multi-extremal programming problem:

$$\begin{aligned} \min \quad & -\frac{1}{4}x_1^2 - \frac{1}{4}x_2^2 + \frac{5}{4}x_1x_2 - x_1 - x_2 \\ \text{s.t.} \quad & -x_1 - x_2 \leq 0, \\ & \frac{1}{3} \leq x_1 \leq 1, \quad -1 \leq x_2 \leq 1. \end{aligned}$$

We solve this problem using the proposed neural network. Simulation results show that the state trajectories of the proposed model converge to the local minimizers  $x^* = (1, -1)$ ,  $\bar{x} = (1, 1)$  and  $\hat{x} = (\frac{1}{3}, 1)$ . Fig. 1 shows that the trajectory of the proposed neural network model converges to the local minimizer  $\bar{x}$ . At the local minimizer  $\bar{x} = (1, 1)$ , we have

$$\nabla^2 L(x, \lambda) + Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{5}{4} \\ \frac{5}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \not\geq 0,$$

therefore  $\bar{x}$  is not global minimizer. The proposed neural network model can be used again for solving this problem. Fig. 2 shows that the trajectory of the proposed neural network model converges to the local minimizer  $\hat{x}$ . At the local minimizer  $\hat{x} = (\frac{1}{3}, 1)$ , we have

$$\nabla^2 L(x, \lambda) + Q = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{5}{4} \\ \frac{5}{4} & \frac{7}{12} \end{pmatrix} \not\geq 0.$$

We use the proposed neural network model for locating a global minimizer of this problem again. Fig. 3 shows that the trajectory of the proposed neural network model converges to the global minimizer of this problem. But sufficient global optimality condition holds at  $x^* = (1, -1)$  which is the global minimizer. At the global minimizer  $x^* = (1, -1)$ , we have

$$\nabla^2 L(x, \lambda) + Q = \begin{pmatrix} \frac{31}{4} & \frac{5}{4} \\ \frac{5}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \succeq 0.$$

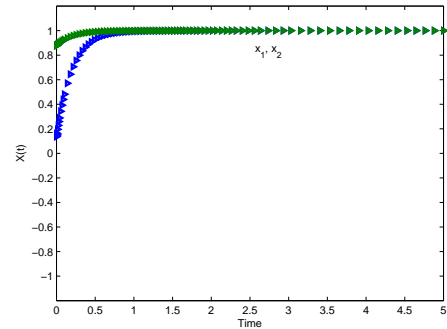


Figure 1: Transient behavior of the proposed neural network model (6) with equilibrium point  $\bar{x} = (1, 1)$ .

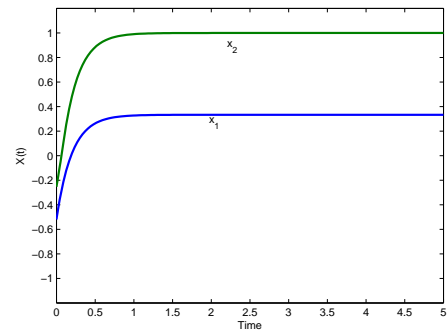


Figure 2: Transient behavior of the proposed neural network model (6) with the equilibrium point  $\hat{x} = (\frac{1}{3}, 1)$ .

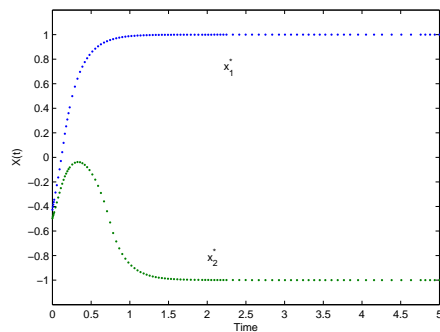


Figure 3: Transient behavior of the proposed neural network model (6) with the equilibrium point  $x^* = (1, -1)$ .

## References

- [1] A. Malek, N. Hosseini-pour-Mahani, and S. Ezazipour, "Efficient Recurrent Neural Network Model For The Solution of General Nonlinear Optimization Problems," *Optimization methods and software*, vol. 25, pp. 489-506, 2010.
- [2] A. Malek, S. Ezazipour, and N. Hosseini-pour-Mahani, "Double Projection Neural Network for Solving Pseudomonotone Variational Inequalities," *Fixed Point Theory*, vol. 12, pp. 401-418, 2011.
- [3] A. Malek, S. Ezazipour, and N. Hosseini-pour-Mahani, "Projected Dynamical Systems and Optimization Problems," *Bulletin of the Iranian Mathematical Society*, vol. 37, pp. 81-96, 2011.
- [4] V. Jeyakumar, S. Srisatkunrajah, and N. Q. Huy, "KuhnTucker sufficiency for global minimum of multi-extremal mathematical programming problems," *J. Math. Anal. Appl*, vol. 335, pp. 779788, 2007.
- [5] V. Jeyakumar, S. Srisatkunrajah, "Geometric conditions for KuhnTucker sufficiency of global optimality in mathematical programming," *European Journal of Operational Research*, vol. 194, pp. 363367, 2009.

# Approximation Orthogonal Filters By Almost Orthogonal Chebyshev Functions

S. R. Alavizadeh\*, PhD student of Yazd university, alavizadeh@stu.yazd.ac.ir

F. M. Maalek Ghaini, Academic member of Yazd university, maalek@yazd.ac.ir.

**Abstract:** In this paper, a set of almost orthogonal Chebyshev polynomials on  $(-1, 1)$  is considered in a new manner to approximate signals generated by systems with built in imperfections. Defining relations of these functions can be used for designing almost orthogonal filters. These filters are generators of orthogonal signals and can be successfully applied in finding the best signal approximation in the mean square error sense. An example is included for demonstrating the efficiency of the method. The results reveal that our method is very effective.

**Keywords:** Almost orthogonal Chebyshev functions; Approximate filter; Transfer function.

## 1 INTRODUCTION

An electrical filter is a system that can be used to modify, reshape, or manipulate the frequency spectrum of an electrical signal according to some prescribed requirements. For example, a filter may be used to amplify or attenuate a range of frequency components, reject or isolate one specific frequency component, and so on [2]. The applications of electrical filters are numerous, for example:

- To eliminate signal contaminations, such as noise in communication systems
- To separate relevant from irrelevant frequency components
- To detect signals in radios and TVs
- To demodulate signals
- To bandlimit signals before sampling
- To convert sampled signals into continuous-time signals
- To improve the quality of audio equipments, e.g., loudspeakers

- In time-division of frequency-division multiplex systems

- In speech synthesis

- In the equalization of transmission lines and cables

- In the design of artificial cochleas.

Depending on the format of the input, output, and internal operating signals, filters can be classified to analog or digital. In analog filters the operating signals are varying voltages and currents, whereas in digital filters they are encoded in some binary format. Continuous-time and sampled-data filters are always analog filters. However, discrete-time filters can be analog or digital [2]. Analog filters can be classified on the basis of their constituent components as

- Passive RLC filters
- Crystal filters
- Mechanical filters
- Microwave filters
- Active RC filters

\*Corresponding Author



- Switched-capacitor filters

One of the major problems in the circuit theory, is the filters approximation. Every physically realizable circuit has a transfer function that is a rational function in  $s$ . We are going to determine classes of rational polynomials that approximate the ideal low-pass filter responses.

Classical orthogonal polynomials have been used for designing low pass orthogonal filters with various applications in mathematics [8], science and engineering, such as in designing orthogonal signal generators [1], [7], least square approximations [3], process modeling and identification [6], [4] and practical realizations of optimal [9], [5] and adaptive systems [10], [11]. In the recent years, a special class of orthogonal functions has been developed, the so called piecewise constant orthogonal functions with Haar and Walsh functions [13] as their main representatives. This class has proven to be especially convenient for analysis of dynamical systems. In this work, we define a class of almost orthogonal functions of Chebyshev type in a new manner to approximate signals generated by systems with built in imperfections.

## 2 Transfer function

Usually, in analog filters the input and output are voltages, e.g.,  $x(t) + v_i(t)$  and  $y(t) + v_o(t)$ . In such a case the transfer function is given by:

$$H_V(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} \quad (1)$$

where  $V_o(s)$  and  $V_i(s)$  are the Laplace transforms of  $v_o(t)$  and  $v_i(t)$ . However, on occasion the input and output are currents, in which case:

$$H_I(s) = \frac{I_o(s)}{I_i(s)} \quad (2)$$

where  $I_o(s)$  and  $I_i(s)$  are the Laplace transforms of  $i_o(t)$  and  $i_i(t)$ .

A transfer function is said to be realizable if it characterizes a stable and causal network. Such a transfer function must satisfy the following constraints:

1. It must be a rational function of  $s$  with real coefficients.
2. Its poles must lie in the left-half  $s$  plane.
3. The degree of the numerator polynomial must be equal to or less than that of the denominator polynomial.

A transfer function may represent a network of comprising elements with real parameters, only if its coefficients are real. The poles must be in the left-half  $s$  plane to ensure that the network is stable and the numerator degree must not exceed the denominator degree to ensure the existence of a causal network.

## 3 Almost orthogonal Chebyshev functions

Let  $\lambda(x)$  be a positive Borel measure on  $(a, b) \subseteq R$ , with infinite support and such that all integrals:

$$\lambda_n = \Lambda(x^n) = \int_a^b x^n d\lambda(x), \quad (3)$$

exist. We define a linear functional  $\Lambda$  on the real polynomials space  $P$ , and also consider an inner product as follows:

$$\langle f, g \rangle = \Lambda[f \cdot g], \quad f, g \in P. \quad (4)$$

The Chebyshev polynomials of the first kind  $T_n(x)$  are orthogonal on  $(-1, 1)$  with respect to the weight function  $w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ . The explicit form of this polynomials are as follows:

$$T_n(x) = n \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{(-1)^k (n-k-1)!}{k! (n-2k)! 4^k} x^{n-2k}. \quad (5)$$

If  $\epsilon = \{\epsilon_n\}$  be a sequence of small positive real numbers, then the sequence of polynomials  $\{T_n^{(\epsilon)}(x)\}$  which satisfy

$$\langle T_j^{(\epsilon)}, T_k^{(\epsilon)} \rangle = \epsilon_{Max(j,k)}, \quad (j \neq k), \quad (6)$$

$$\|T_k^{(\epsilon)}\|_{\epsilon}^2 = \langle T_k^{(\epsilon)}, T_k^{(\epsilon)} \rangle - \epsilon_k \gg 0, \quad (7)$$

are called almost orthogonal Chebyshev functions. Some of the beginning terms of this sequence are:

$$1, x + \frac{\epsilon}{\pi}, x^2 + \frac{2\epsilon(\pi - \epsilon)}{\pi^2}x - \frac{\pi - 2\epsilon}{2\pi}, \dots \quad (8)$$



It is clear that

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} T_n^{(\epsilon)}(x) = T_n(x). \quad (9)$$

## 4 Approximation filters

We can design Chebyshev type orthogonal filters for determining approximate values of continuous real functions. It is a known fact that in practice there is often a need for some real signal  $y(t)$ , obtained by measuring, to be represented in the following form [12], [1]:

$$y(t) \approx y_M(t) = \sum_{i=0}^n c_i T_i^{(\epsilon)}(t), \quad (10)$$

where  $T_i^{(\epsilon)}(t)$  can represent almost orthogonal Chebyshev functions generated by an almost orthogonal filter.

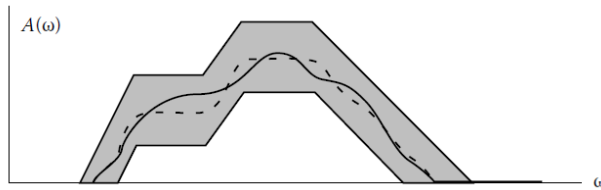


Figure 1: General approximation problem

Function approximation is achieved with mean squared error (MSE), as optimization criterion, i.e.:

$$J = \frac{1}{T} \int_0^T (y(t) - y_M(t))^2 dt. \quad (11)$$

To attain the greatest matching of the given signal  $y(t)$  and the approximate signal  $y_M(t)$ ,  $J$  should be as small as possible. The parameters  $c_i$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ) should be found to minimize  $J$  (and make it zero, if possible).

**Example 4.1.** Consider the signal given by:

$$y(t) = 0.805 - 4.025e^{-t} + 8.05e^{-2t} - 8.05e^{-3t} + 4.025e^{-4t} - 0.805e^{-5t},$$

that can be represented as a step response of real thermal system with the transfer function:

$$W(s) = \frac{0.805}{0.008s^5 + 0.125s^4 + 0.708s^3 + \dots + 1.875s^2 + 2.283s + 1}$$

The results of this problem are shown in figures 2,3.

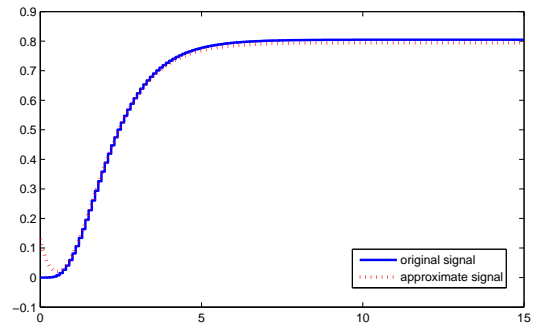


Figure 2: Original and approximation signals

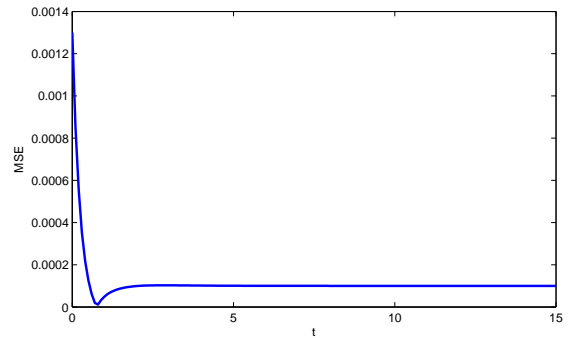


Figure 3: Minimum mean squared error

## 5 Conclusion

In the present paper, we proposed a set of almost orthogonal Chebyshev polynomials on  $[0, 1]$  to approximate signals generated by systems with built-in imperfections. An example is presented to demonstrate higher accuracy and simplicity of the proposed method.



## References

- [1] A. Bultheel, Orthogonal rational functions, vol. 5, Cambridge University Press, 1999.
- [2] W. K. Chen, Passive, active, and digital filters, CRC Press, 2009.
- [3] K. B. Datta, B. M. Mohan, Orthogonal functions in systems and control, vol. 9, World Scientific, 1995.
- [4] R. S. Esfandiari, B. Lu, Modeling and analysis of dynamic systems, CRC Press, 2014.
- [5] O. Gramstad, K. Trulsen, Can swell increase the number of freak waves in a wind sea?, Journal of Fluid Mechanics 650 (2010) 57–79.
- [6] P. S. Heuberger, P. M. Van den Hof, B. Wahlberg, Modelling and identification with rational orthogonal basis functions, Springer, 2005.
- [7] A. D. Ilić, V. D. Pavlović, New class of filter functions generated most directly by christoffel-darboux formula for gegenbauer orthogonal polynomials, International Journal of Electronics 98 (1) (2011) 61–79.
- [8] A. Korkmaz, I. Dag, Polynomial based differential quadrature method for numerical solution of nonlinear burgers' equation, Journal of the Franklin Institute 348 (10) (2011) 2863–2875.
- [9] B. Mohan, S. Kumar Kar, Orthogonal functions approach to optimal control of delay systems with reverse time terms, Journal of the Franklin Institute 347 (9) (2010) 1723–1739.
- [10] S. Nikolić, D. Antić, B. Danković, M. Milojković, Z. Jovanović, S. Perić, Orthogonal functions applied in antenna positioning, Advances in Electrical and Computer Engineering 10 (4) (2010) 35–42.
- [11] P. Regalia, Adaptive IIR filtering in signal processing and control, vol. 90, CRC Press, 1994.
- [12] G. Szegő, Orthogonal polynomials, vol. 23, American Mathematical Soc., 1939.
- [13] R. H. Wang, W. Dan, Improved haar and walsh functions over triangular domains, Journal of the Franklin Institute 347 (9) (2010) 1782–1794.

## الگوریتم ترکیبی PSO-BFGS برای حل مسائل برنامه‌ریزی غیرخطی

محسن رجب زاده، دانشجوی کارشناسی ارشد مهندسی صنایع، دانشگاه بجنورد، mohsen.rajabzadeh68@gmail.com

محمد صادقی، دانشجوی کارشناسی ارشد مهندسی صنایع، دانشگاه بجنورد، m.sadeghi.ie2013@gmail.com

مجتبی حاجی پور، عضو هیأت علمی گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه بجنورد، m.hajipoor@ub.ac.ir

**چکیده:** در این مقاله الگوریتم فرا ابتکاری PSO-BFGS که بر پایه‌ی روش‌های شبه نیوتن اصلاح شده (BFGS) و بهینه‌سازی انبوه ذرات (PSO) طراحی شده است برای حل مسائل برنامه‌ریزی غیرخطی ارائه می‌شود. این رویکرد با کمک روش انبوه ذرات نتایج حاصل از جستجوی روش BFGS اصلاح شده را در رویه‌ای تکرار شونده بهبود بخشیده و از ماندن در یک جواب نامناسب جلوگیری می‌کند. این توالی از تکرارها به وسیله‌ی روش جریمه لاگرانژ افزوده مدیریت می‌شود. نتایج عددی بیانگر کارایی این الگوریتم برای حل مسائل برنامه‌ریزی غیرخطی می‌باشد. **کلمات کلیدی:** برنامه‌ریزی غیرخطی، تابع جریمه‌ی لاگرانژ افزوده، الگوریتم BFGS، بهینه‌سازی انبوه ذرات

### مقدمه

آن  $x_i^{up}$  و  $x_i^{lo}$  به ترتیب حد پایین و حد بالا هستند. تا کنون روش‌های مختلفی برای حل مسأله‌ی (۱) ارائه شده است؛ اما بسیاری از این روش‌ها کارایی زیادی در برخورد با مسائل بزرگ مقیاس ندارند. در سال‌های اخیر محققین برای حل این مسائل ایده‌ی ترکیب کردن تکنیک‌های برنامه‌ریزی ریاضی با الگوریتم‌های فرا ابتکاری را مطرح کردند [۱، ۲].

به سبب کاربرد وسیع برنامه‌ریزی غیرخطی در حل مسائل طراحی مهندسی، مدیریت علمی و علوم اقتصادی، این حوزه در سال‌های اخیر مورد توجه بسیاری از پژوهشگران قرار گرفته است. فرم کلی یک مسأله‌ی برنامه‌ریزی غیرخطی به صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned} \min & f(x) \\ \text{s.t.} & \begin{cases} g_j(x) \leq 0, \forall j = 1, \dots, m_1, \\ h_k(x) = 0, \forall k = 1, \dots, m_2, \\ x \in X \subseteq R^n, \end{cases} \end{aligned} \quad (1)$$

در این مقاله ترکیبی از روش BFGS اصلاح شده [۳] و الگوریتم بهینه‌سازی انبوه ذرات (PSO) در یک رویه‌ی تکرار شونده برای حل مسائل برنامه‌ریزی غیرخطی همراه با قیود مساوی و نامساوی پیشنهاد شده است. این الگوریتم ترکیبی به وسیله‌ی روش جریمه لاگرانژ افزوده (ALP) [۳] مدیریت می‌شود.

که در آن بردار متغیرهای تصمیم پیوسته،  $f(x)$  تابع هدف،  $g_j(x)$  و  $h_k(x)$  به ترتیب محدودیت‌های نامساوی و مساوی می‌باشند. فرض کنیم  $X = \{x : x_i^{lo} \leq x_i \leq x_i^{up}, i = 1, \dots, n\}$  که در

## الگوریتم ترکیبی PSO-BFGS

بگیرید.

$$f_{ALP}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = f(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^{m_1} \mu_j \max^2 \left\{ g_j(x) + \frac{u_j}{2\mu_j}, 0 \right\} - \sum_{j=1}^{m_1} \frac{u_j^2}{4\mu_j} + \sum_{k=1}^{m_2} v_k h_k(x) + \sum_{k=1}^{m_2} \mu_{m_1+k} h_k^2(x). \quad (2)$$

**گام ۱-۱:** نقطه‌ی آغازین  $x_\mu^l$  داده شده است. سپس الگوریتم BFGS اصلاح شده را تا رسیدن به معیار توقف  $\|x^{t+1} - x^t\| \leq \delta$  ادامه دهید. آخرین جواب را  $x_\mu^B$  نامیده و به گام ۲-۱ بروید.

**گام ۲-۱:** دسته‌ی ذرات  $S - 1$  را در محدوده‌ی متغیرهای تصمیم بسازید. الگوریتم PSO را در نقطه‌ی  $x_\mu^B$  برای انجام یک جستجوی سراسری به کار بگیرید. بهترین جواب را  $x_\mu^p$  نامیده و به گام ۳-۱ بروید.

**گام ۳-۱:** اگر  $\|x_\mu^p - x_\mu^l\| \leq \delta$  برقرار بود،  $x_\mu^p$  را در  $x_\mu^{l+1}$  قرار داده و به گام ۲ بروید. در غیر این صورت  $x_\mu^p$  را در  $x_\mu^l$  قرار داده و به گام ۱-۱ برگردید.

**گام ۲:** هم فاکتورهای جریمه و هم تخمین ضرایب لاگرانژ را اصلاح کنید. اگر  $viol(x_\mu^{l+1}) \leq 0.25 viol(x_\mu^l)$  که در آن صورت زیر تعریف می شود، برقرار بود به گام ۲-۱ و در غیر این صورت به گام ۲-۲ بروید.

$$\begin{aligned} viol_j(x_\mu^0) &= \max \{g_j(x_\mu^0), 0\}, \quad j = 1, \dots, m_1, \\ viol_{m_1+1}(x_\mu^0) &= |h_k(x_\mu^0)|, \quad k = 1, \dots, m_2, \\ viol_j(x_\mu^0) &= \max \{viol_1(x_\mu^0), \dots, viol_{m_1+m_2}(x_\mu^0)\}. \end{aligned}$$

**گام ۱-۲:** ضرایب لاگرانژ را با استفاده از معادلات

$$\begin{aligned} u_j^{l+1} &= u_j^l + \max \{2\mu_j g_j(x_\mu^{l+1}), -u_j^l\}, \\ v_k^{l+1} &= v_k^l + 2\mu_{m_1+k} h_k(x_\mu^{l+1}), \end{aligned}$$

اصلاح کنید که  $1 \leq j \leq m_1$  و  $1 \leq k \leq m_2$ . در مواردی که به ازای  $1 \leq j \leq m_1$  عبارت  $\mu_j < \mu_j^{new} + 1$  و به ازای  $k = 1, \dots, m_2$  عبارت  $\mu_{m_1+k} < |v_k^{new}| + 1$  برقرار بود، به ترتیب  $\mu_j^{l+1} = \mu_j + 1$  یا  $\mu_{m_1+k}^{l+1} = |v_k^{l+1}| + 1$  قرار داده و به گام ۳ بروید.

**گام ۲-۲:** فاکتورهای جریمه را طبق معادلات زیر

عموماً مهم‌ترین نقص الگوریتم‌های جدید که کارایی آن‌ها را تحت تأثیر قرار می‌دهد، شیوه‌ی رسیدن به جواب بهینه و دقت پایین آن می‌باشد. برای جبران بخشی از این ناکارآمدی‌ها، در این مقاله سعی شده است که الگوریتم BFGS همزمان با الگوریتم PSO در یک رویه‌ی تکراری برای بهبود نتایج به کار گرفته شود. برای رسیدن به این هدف در ابتدا یک جستجوی اولیه با استفاده از الگوریتم BFGS صورت می‌گیرد و سپس بهترین جواب‌های حاصل از روش BFGS برای بررسی‌های بعدی به روش PSO واگذار می‌شود. روش BFGS یکی از روش‌های شبه نیوتنی است که در هر تکرار برای دست‌یابی به جهت حرکت به سوی نقطه بهینه، تقریبی از معکوس ماتریس هسین را بکار گرفته و طول گام حرکت را نیز از طریق حل یک زیر مسأله برنامه ریزی خطی بدست می‌آورد. این توالی از تکرارها تا رسیدن به شرایط توقف ادامه می‌یابد. روش PSO نیز یکی از روش‌های بهینه‌سازی است که هر جواب‌شدنی را به عنوان یک ذره در نظر گرفته و مقدار تابع شایستگی آن را محاسبه می‌کند. برای دستیابی به بهینگی در این الگوریتم، هر ذره با سرعتی مشخص به سمت ذره شایسته‌تر حرکت می‌کند. در ادامه جواب حاصل برای اصلاح ضرایب لاگرانژ و فاکتورهای جریمه تخمینی روش ALP مورد استفاده قرار می‌گیرد. در واقع این الگوریتم یکپارچه سعی دارد که از ماندن در یک جواب نامناسب جلوگیری کند.

الگوریتم ترکیبی طی گام‌های زیر خلاصه می‌شود:

**گام صفر:** مقدار اولیه‌ی پارامترها را مشخص کنید. فرض کنید  $(u^0, v^0)$  بردارهای ضرایب لاگرانژ،  $\mu$  بردار فاکتورهای جریمه،  $S$  اندازه‌ی دسته،  $t_{\max}$  حداکثر تعداد تکرارهای الگوریتم PSO،  $\alpha$  ضریب جریمه،  $c_1$  و  $c_2$  فاکتورهای وزن دهی در الگوریتم PSO،  $\varepsilon$  تلورانس ناموجه شدن و  $\delta$  تلورانس فاصله باشد.  $x_\mu^0 = (x^{lo} + x^{up})/2$  و  $t = 0$  قرار داده و به گام ۱ بروید.

**گام ۱:** تابع ALP زیر را روی فضای جواب  $X$  در نظر

افزایش داده، سپس به گام ۳ بروید.

$$\mu_j \leftarrow \max(\alpha\mu_j, \mu_j^{1.3}),$$

$$\text{if } viol_j(x_\mu^{l+1}) > 0.25viol_j(x_\mu^l),$$

که  $1 \leq j \leq m_1$  و برای  $1 \leq k \leq m_2$

$$\mu_{m_1+k} \leftarrow \max(\alpha\mu_{m_1+k}, \mu_{m_1+k}^{1.3}),$$

$$\text{if } viol_{m_1+k}(x_\mu^{l+1}) > 0.25viol_{m_1+k}(x_\mu^l),$$

مسئله	PSO-BFGS			PSO-DFP		
	Best	Std.	CPU	Best	Std.	CPU
G01	-۱۵.۰۰۰	۰.۰	۲.۶	-۱۵.۰۰۰	۰.۰	۲.۰
G02	۰.۳۲۱	۰.۰	۱.۵	۰.۳۴۷	۰.۱	۱.۷
G03	۱.۰۰۰	۰.۰	۱.۳	۰.۰۰۰	۰.۰	۰.۶
G04	-۳۰۶۶۵.۵۳۹	۰.۰	۷.۵	-۳۰۶۶۵.۵۳۹	۰.۰	۷.۳
G05	۵۱۲۶.۴۹۷	۰.۰	۱۵.۶	۵۱۲۶.۴۹۷	۴۷۹	۱۸.۵
G06	-۶۹۶۱.۸۱۶	۰.۰	۶.۵	-۶۹۶۱.۸۱۵	۰.۰	۷.۸
G07	۲۴.۳۰۶	۰.۰	۶.۱	۲۴.۳۰۶	۱.۲	۳۳.۸
G08	۰.۰۹۶	۰.۰	۰.۵	۰.۰۹۶	۰.۰	۰.۶
G09	۶۸۰.۶۳۰	۰.۰	۳.۵	۶۸۰.۶۳۰	۰.۰	۱۹.۲
G10	۷۰۸۳.۴۵۷	۴۳۱	۲۰.۷	۷۰۶۸.۶۵۶	۲۶۶	۱۸.۰
G11	۰.۷۵۰	۰.۰	۲.۱	۰.۷۵۰	۰.۰	۲.۷
G12	۱.۰۰۰	۰.۰	۲.۹	۱.۰۰۰	۰.۰	۳.۰
G13	۰.۰۵۴	۰.۲	۲.۵	۰.۰۵۴	۰.۳	۷.۲
PV	۵۸۸۵.۳۳۲	۰.۵	۶.۹	۵۸۸۵.۳۳۲	۰.۱	۹.۴
TC	۰.۰۱۳	۰.۰	۳.۷	۰.۰۱۳	۰.۰	۲.۶
WB	۱.۷۲۵	۰.۰	۶.۹	۱.۷۲۵	۰.۲	۷.۲
SR	۲۹۹۶.۳۴۷	۲.۸	۹.۸	۲۹۹۶.۳۴۷	۶.۱	۲۱۱
Mean	-	۲۵.۶	۵.۹	-	۴۵	۹

هر یک از مسائل ۱۰ مرتبه توسط این دو الگوریتم اجرا شده است که بهترین مقداری که هر الگوریتم به آن دست می‌یابد (Best)، انحراف استاندارد جواب‌ها (Std.) و زمان لازم برای محاسبات (CPU) برای هر الگوریتم مشخص شده است. همان طور که مشاهده می‌شود در ۱۵ مثال از ۱۷ مثال بررسی شده، هر دو الگوریتم به بهترین جواب موجود دست می‌یابند. شکل ۱ نشان می‌دهد که الگوریتم PSO-BFGS نسبت به الگوریتم PSO-DFP از زمان محاسباتی کمتری برخوردار است. همچنین شکل ۲ نشان می‌دهد که جواب‌های حاصل از الگوریتم PSO-BFGS پراکندگی کمتری نسبت به جواب‌های حاصل از الگوریتم PSO-DFP دارند. کارایی الگوریتم ترکیبی PSO-BFGS در مقایسه با الگوریتم ASQP [۲] که یکی از قوی‌ترین الگوریتم‌های بهینه‌سازی غیرخطی است در جدول ۲ نشان داده شده است. در این مقایسه ۴ عدد از مسائل CUTE [۴] به کار گرفته می‌شود. این مسائل از نوع مسائل با محدودیت مساوی و با اندازه‌ی متوسط هستند.

**گام ۳:** وضعیت شدنی بودن را چک کنید. اگر  $viol(x_\mu^{l+1}) > \varepsilon$  آنگاه قرار دهید  $l = l + 1$  و به گام ۱ بروید. در غیر این صورت الگوریتم را خاتمه داده و  $x_{Best} = x_\mu^{l+1}$  و همچنین  $f_{Best} = f(x_\mu^{l+1})$  قرار دهید. اثبات می‌شود که هر مسئله برنامه ریزی غیرخطی (۱) با توابع پیوسته و دو بار مشتق پذیر با بکارگیری تابع ALP و الگوریتم ترکیبی PSO-BFGS به یک جواب KKT اولیه - دوگان همگراست [۱].

## نتایج عددی

در این بخش الگوریتم ارائه شده، با الگوریتم PSO-DFP مقایسه می‌شود. در این مقایسه ۱۷ عدد از مسائل Michalewicz and Koziel [۵] به کار گرفته شده است. این مسائل از نوع مسائل با محدودیت مساوی و با اندازه‌ی متوسط بوده و اعداد موجود در جدول ۱ نشان دهنده‌ی خروجی‌های آزمایش هستند.

جدول ۱: نتایج عددی مقایسه الگوریتم‌های PSO-BFGS و PSO-DFP برای حل مسائل مختلف

## مراجع

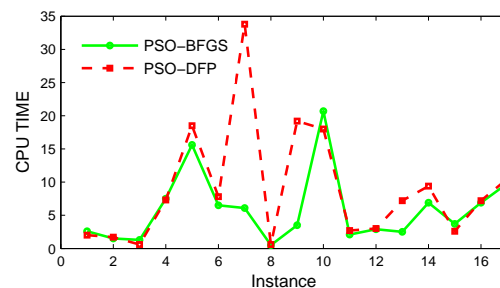
[۱] R. Nezhad, Mohammad A. Eshragh- A. Shandiz, Aliakbari particle "A Jahromi, niaye for algorithm swarm-BFGS prob- programming nonlinear Operations & Computers lems," pp. ۹۶۳-۹۷۲, ۴۰ vol. Research, ۲۰۱۳.

[۲] J. Nocedal, Gilbert, J-C Byrd, R. on based method region trust "A nonlinear for techniques interior Program. Math. programming," pp. ۱۴۹-۱۸۵, ۸۹ vol. A, Ser. ۲۰۰۰.

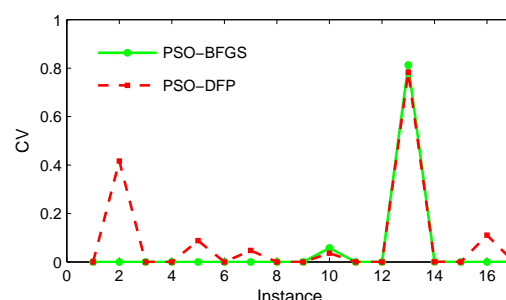
[۳] Shetty, L. Sherali, H. Bazaraa, M. theory programming: Nonlinear John York: New, algorithms and ۲۰۰۶ Sons, and Wiley

[۴] N. Gould, Conn, A. Bongartz, I. Constrained CUTE: Toint," P. envi- testing unconstrained and Math Trans. ACM ronment", ۱۶۰-۱۲۳ pp. ۱ vol. Softw, ۱۹۹۵.

[۵] Z. Koziel, S. Michalewicz, "Evolutionary homomorphous algorithms, constrained and mappings, Evolu- optimization", parameter, ۷ vol. Computation, tionary, ۱۹-۴۴, ۱۹۹۹ pp.



شکل ۱: مقایسه زمان محاسباتی PSO-BFGS و PSO-DFP



شکل ۲: مقایسه پراکندگی جواب‌های PSO-BFGS و ASQP

با توجه به این که الگوریتم ASQP از بهترین الگوریتم های شناخته شده در حل مسائل برنامه ریزی غیرخطی است، نتایج عددی حاکی از آن است که الگوریتم PSO-BFGS نیز به بهترین جواب های شناخته شده دست یافته و یا به آن ها بسیار نزدیک می شود.

جدول ۲: نتایج عددی مقایسه الگوریتم های PSO-BFGS و ASQP برای حل مسائل مختلف

مسئله	PSO-BFGS			ASQP		
	Best	Std.	#Is	Best	Std.	#Is
Mwright	۱.۲۸۸	۰.۰	۰	۱.۲۸۸	۲۸۲.۸	۱
Coshfun	-۰.۷۷۳	۰.۰	۰	-۹.۹۴۵	۳.۵	۳
Dnieper	۱۸۷۴۲.۴۳	۱۱.۹	۲	۱۸۷۴۴.۰۲	۰.۰	۹
Spiral	-۲.۸۲۴-۶	۰.۰	۰	-	-	۱۰
Mean	-	۲.۹۷	۰.۵	-	۹۵.۴۳	۵.۷

علاوه بر این آن چه که الگوریتم PSO-BFGS را متمایز می کند پراکندگی کم جواب ها در هر بار اجرای این الگوریتم و توانایی آن برای دستیابی به جواب های شدنی است که معیار (#Is) در جدول ۲ تعداد جواب های نشدنی در ۱۰ بار اجرای هر مساله توسط هر الگوریتم را مشخص می کند. همانطور که ملاحظه می شود نتایج ارائه شده نشان دهنده کارایی الگوریتم PSO-BFGS در حل مسائل غیرخطی متوسط مقیاس به ویژه مسائل با محدودیت های مساوی است.



## یک الگوریتم برنامه ریزی درجه دوم متوالی برای بهینه سازی غیرخطی بدون استفاده از تابع جریمه و فیلتر

رزیتا زین العابدینی، دانشجوی کارشناسی ارشد دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی ، rabedini@mail.kntu.ac.ir ،  
محمدرضا پیغامی، عضو هیئت علمی دانشکده ریاضی دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، peyghami@kntu.ac.ir

**چکیده:** در این مقاله، یک الگوریتم برنامه ریزی درجه دوم متوالی معرفی می شود که در آن از تابع جریمه ای و فیلتر برای حل مسائل بهینه سازی مقید استفاده نمی کند. در ساختار این الگوریتم، هر دو روش ناحیه اعتماد و جستجوی خطی به نحو مناسبی به کارگرفته می شوند. در روش های کلاسیک ناحیه اعتماد، اگر گام آزمایشی منجر به افزایش مقدار تابع هدف و یا تخطی قیود شود، آن گاه زیرمساله ناحیه اعتماد مجدداً حل می شود که بسیار هزینه بر است. به منظور کاهش هزینه های محاسباتی حل مجدد زیرمساله ناحیه اعتماد، در روش ارائه شده در این مقاله، هیچ گامی حذف نمی شود. در این الگوریتم هرگام از ترکیب یک گام نرمال و یک گام مماسی بدست خواهد آمد. هم چنین، با در نظر گرفتن برخی فرضیات، همگرایی سراسری الگوریتم جدید به نقاط ایستای مرتبه اول مورد بررسی قرار می گیرد. نتایج عددی حاصل از اعمال روش پیشنهادی روی مسائل آزمونی از کتابخانه CUTEr مویید عملکرد مناسب این روش در عمل است.

**کلمات کلیدی:** بهینه سازی غیرخطی مقید، روش ناحیه اعتماد، روش جستجوی خطی، برنامه ریزی درجه دوم متوالی

### ۱- مقدمه

تکراری بسیار موثر برای حل مسائل مقیاس کوچک و متوسط است. در این روش به طور معمول از تابع جریمه ای استفاده می شود، در حالی که استفاده از تابع جریمه ای می تواند مشکلاتی را در پی داشته باشد. به عنوان مثال، انتخاب مناسب پارامتر جریمه ای یکی از این مشکلات است. در مرجع [۱] روش فیلتر ارائه شده و در حل مسائل غیر خطی با روش برنامه ریزی درجه دوم متوالی ناحیه اعتماد به کار برده شده است. دیدگاه فیلتر برای پذیرش یا رد گام به طور کلی متفاوت تر از

مساله برنامه ریزی غیرخطی با قیود تساوی زیر را در نظر می گیریم:

$$\begin{aligned} \min f(x) \\ C(x) = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

که در آن  $f: R^n \rightarrow R$  و  $C: R^n \rightarrow R^m$  توابع دو بار بطور پیوسته مشتق پذیر هستند. روش برنامه ریزی درجه دوم متوالی برای حل مساله (۱) یک روش

که در آن  $J_k = J(x_k)$  و  $C_k = C(x_k)$  ماتریس ژاکوبین در نقطه  $x_k$  است. برای محاسبه گام نرمال به گام گوس-نیوتن دقیق نیاز نیست، اما باید شرط (۳) برای ثابت  $k_c$  برقرار شود:

$$\frac{1}{2}\|C_k\|^2 - \frac{1}{2}\|C_k + J_k n\|^2 \geq k_c \|J_k C_k\| \min\left(\frac{\|J_k C_k\|}{1 + \|J_k C_k\|}, \Delta_k^c\right) \quad (3)$$

ماتریس  $w_k = J_k^T J_k$  تقریب گوس-نیوتن متقارن برای ماتریس هسی در نقطه  $x_k$  است. همچنین واضح است که با شرایط بالا اگر نقطه  $x_k$  شدنی باشد، آن گاه  $n_k = 0$  است. پس از محاسبه  $n_k$  که هدفش کاهش تخطی قیود است، به دنبال یافتن گام مماسی  $t_k$  هستیم. گام  $t_k$  را طوری می یابیم که بهینگی را بهبود بخشد. برای این منظور، مدل درجه دوم زیر را برای تابع هدف در نظر می گیریم

$$m_k(x_k + p) = f_k + \langle g_k, p \rangle + \frac{1}{2} \langle p, B_k p \rangle \quad (4)$$

که در آن  $f_k = f(x_k)$  و  $g_k = \nabla f(x_k)$  تقریب هسی تابع لاگرانژی است. برای بدست آوردن  $t_k$  زیر مساله (۵) با در نظر گرفتن قید  $\|t\| \leq \Delta_k^f$  حل می شود.

$$m_k(x_k + n_k + t) = m_k(x_k + n_k) + \langle g_k^n, t \rangle + \frac{1}{2} \langle t, B_k t \rangle \quad (5)$$

که در آن  $g_k^n = g_k + B_k n_k$  است. حال، می توان گام کامل را به صورت  $p_k = n_k + t_k$  معرفی نمود. در گام پایانی الگوریتم، ضرایب لاگرانژ از حل زیر مساله زیر بدست می آیند:

$$\min \frac{1}{2} \|g_k^n + J_k^T \lambda\| \quad (6)$$

در روش پیشنهادی این مقاله، از آنجا که از تابع جریمه و فیلتر استفاده نشده است، لذا معیاری متفاوت بر پذیرش گام آزمایشی ضروری به نظر می رسد. بر اساس

دیدگاه تابع جریمه ای است. در این روش گام آزمایشی در صورتی پذیرفته می شود که کاهش کافی در مقدار تابع هدف و یا معیار تخطی قیود ایجاد کند. اخیراً، کارهای مختلفی در زمینه عدم استفاده از تابع جریمه و فیلتر برای مسائل مقید تساوی در ادبیات موضوع صورت گرفته است. در مرجع [۲] روش ناحیه اعتماد نایکنواخت ارائه شده است. هم چنین، مرجع [۳] یک الگوریتم کیفی-اعتماد را معرفی کرده است. در این روش از ناحیه اعتمادهای متفاوت برای تابع هدف و تخطی قیود استفاده شده است. در این مقاله، یک روش برنامه ریزی درجه دوم متوالی ناحیه اعتماد برای حل مساله (۱) ارائه می شود که از الگوریتم کیفی-اعتماد پیشنهادی در [۳] الهام گرفته است. به علاوه، الگوریتم پیشنهادی جدید مجهز به یک جستجوی خطی به منظور کاهش حل مجدد زیرمساله ناحیه اطمینان است [۴]. این روش در رده روش های تقریبی قرار دارد.

این مقاله در ۵ بخش دسته بندی شده است. در بخش دوم به ارایه ساختار الگوریتم پیشنهادی می پردازیم. در بخش ۳ همگرایی سراسری روش پیشنهادی تحت فرضیات استاندارد ساخته می شود. نتایج عددی روی مسایل آزمونی و نتیجه گیری مقاله به ترتیب در بخش های ۴ و ۵ ارائه شده اند.

## ۲- معرفی ساختار الگوریتم

برای حل مساله (۱)، در ابتدا به بهبود تابع هدف و کاهش تخطی قیود بطور جداگانه نگاه می کنیم. معیار تخطی قیود در نقطه  $x$  به صورت  $h(x) = \frac{1}{2} \|C(x)\|$  تعریف می شود که در آن  $\|\cdot\|$  معرف نرم اقلیدسی است. گام نرمال از حل زیر مساله زیر محاسبه می شود:

$$\min \frac{1}{2} \|C_k + J_k n\|^2 \quad (2)$$

$$\|n\| \leq \Delta_k^c$$

مرتبۀ اول و نقاط ایستای ناشدنی اتفاق نیفتند، آن گاه یک زیر دنباله از اندیس ها مثل  $\kappa$  وجود دارد به طوری که

$$\lim_{k \rightarrow \infty, k \in \kappa} Z_k^T g_k = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{k \rightarrow \infty, k \in \kappa} C_k = 0$$

که در آن  $Z_k$  یک پایه متعامد برای فضای پوچ  $J_k$  است. در نتیجه، هر نقطه حدی از دنباله  $\{x_k\} \in \kappa$  یک نقطه بحرانی مرتبۀ اول خواهد بود.

## ۴- نتایج عددی

در این بخش، نتایج عددی انجام شده توسط نرم افزار متلب، عملکرد مناسب الگوریتم پیشنهادی را نشان می دهد. در پیاده سازی، برای تقریب ماتریس هسی اولیه از  $B_0 = I$  و برای بروز رسانی از روش ذکر شده در [۵] استفاده می شود. به منظور نشان دادن عملکرد الگوریتم، نتایج عددی روش پیشنهادی با روش ارائه شده در [۶] مقایسه می شود. لازم به ذکر است که مقایسه بر اساس تعداد تکرار ها با شرط توقف  $\|g_k + \nabla C(x_k)^T \lambda_k\| \leq 10^{-6}$  و  $\|h(x_k)\| \leq 10^{-6}$  روی ۲۲ مساله مقیاس کوچک و متوسط از مجموعه مسایل آزمونی کتابخانه CUTEr انجام می شود. شکل ۱ نمودار عملکرد الگوریتم های در نظر گرفته شده را نشان می دهد.

این معیار مساله به دو بخش تکرار نوع  $f$  و تکرار نوع  $h$  تقسیم بندی می شود. در بخش تکرار نوع  $f$  بهبود در تابع هدف مد نظر است و هدف در تکرار نوع  $h$  کاهش بیشتر در تخطی قیود است. در این مقاله برای پذیرش گام از تکنیک جستجوی خطی استفاده می شود. در واقع، هیچ گام آزمایشی نادیده گرفته نمی شود، زیرا از لحاظ محاسباتی حل مجدد زیر مساله مقرون به صرفه نیست.

ساختار الگوریتم:

گام ۰:  $x_0 \in R^n, k = 0, B_0 \in S^{n \times n}, \Delta_0^c, \Delta_0^f$   
گام ۱: حل زیر مساله کمترین مربعات (۶) برای یافتن ضریب لاگرانژ تکرار  $k + 1$   
گام ۲: (گام نرمال) اگر نقطه  $x_k$  شدنی باشد  $n_k = 0$  در غیر این صورت زیر مساله (۲) حل می شود.  
گام ۳: (گام مماسی) اگر ماتریس  $J_k$  رتبه سطری کامل باشد  $t_k = 0$  در غیر این صورت زیر مساله (۵) برای یافتن  $t_k$  حل می شود.

گام ۴: معرفی گام کامل  $p_k = n_k + t_k$

گام ۵: برقراری شرایط گام نوع  $f$  [۳]

۵-۱: اگر  $f(x_k + p_k) < f(x_k)$  باشد پذیرش گام و بروز کردن شعاع های ناحیه اعتماد

۵-۲: اگر  $f(x_k + p_k) > f(x_k)$  ورود گام جستجوی خطی

گام ۶: برقراری شرایط گام نوع  $h$  [۳]

۶-۱: اگر  $h(x_k + p_k) < h(x_k)$  باشد پذیرش گام و بروز کردن شعاع های ناحیه اعتماد

۶-۲: اگر  $h(x_k + p_k) > h(x_k)$  باشد ورود گام جستجوی خطی

گام ۷: بروز کردن  $B_{k+1}$  و قراردادن  $k = k + 1$

## ۳- قضیه همگرایی

در این قسمت تحت فرضیات استاندارد که در ادبیات موضوع وجود دارد نشان می دهیم که اگر نقاط بحرانی

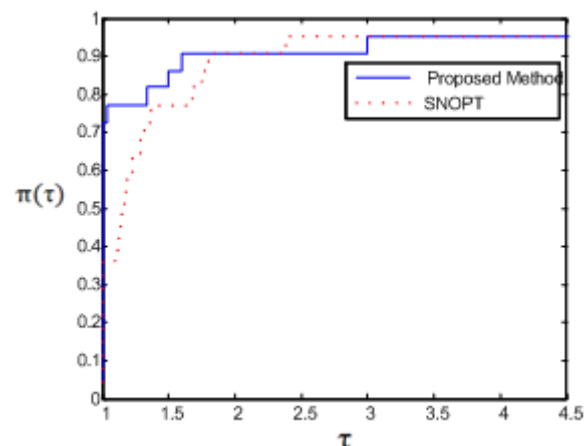
con- equality nonlinear for ods  
 a without optimization strained  
 Pro- Math. function, penalty  
 .۲۰۰۳، ۱۰۳-۱۳۵ :۹۵ gram.

Ph.L. and Gould N.I.M. [۳]  
 program- Nonlinear Toint.  
 function, penalty a whitout ming  
 ، ۱۵۵-۱۹۸ :۱۲۲ Program. Math. ،  
 .۲۰۱۰

Nu- Wright. S.J. and Nocedal J. [۴]  
 Springer. Optimization, merical  
 .۲۰۰۶

algorithm fast A Powell. M.J.D. [۵]  
 op- constrained nonlinearly for  
 Watson calculations, timization  
 analysis. Numerical GA(ed)  
 ، ۱۴۴-۱۵۷ Springer-Berlin.  
 .۱۹۷۸

M.A. and Murray W. Gill, P.E. [۶]  
 SQP An SNOPT: Saunders.  
 con- large-scale for algorithm  
 SIAM optimization, strained  
 .۲۰۰۵، ۹۹-۱۳۱ :۴۷ Rev.



شکل ۱: نمودار مقایسه عملکرد روش های در نظر گرفته شده

## ۵- نتیجه گیری

در این مقاله، یک روش برنامه ریزی برنامه ریزی درجه دوم متوالی برای حل مسائل مقید تساوی ارائه شد. در این روش با وجود عدم استفاده از فیلتر و تابع جریمه ای، همگرایی سراسری به نقاط بحرانی مرتبه اول نیز برآورده می شود. نکته جالب دیگر در این الگوریتم استفاده از دو ناحیه اعتماد متفاوت برای دو زیر مساله نرمالی و مماسی و همچنین استفاده از ترکیب روش های جستجوی خطی و ناحیه اعتماد برای برنامه ریزی درجه دوم متوالی است. با استفاده از روش جستجوی خطی می توان تعداد تکرارها را کاهش داد.

## مراجع

Non- Leyffer. S. and Fletcher R. [۱]  
 a without programming linear  
 Pro- Math. function, penalty  
 .۲۰۰۲، ۲۷۰-۲۳۹ :۹۱ gram.

Non- Ulbrich. S. and Ulbrich M. [۲]  
 meth- region trust monotone



# Linear Plus Linear Fractional Problems with Absolute Value Functions

E. Valipour\*, Department of Mathematics ,

Shahid Bahonar University of Kerman, valipour@math.uk.ac.ir; ezat.valipour@gmail.com.

**Abstract:** This paper deals with a linear plus linear fractional problem with absolute value functions which is nonsmooth. It considers a well-known transformation to convert the problem into a smooth one. It also presents some conditions under which the proposed nonsmooth problem may not be equivalent to the resulted smooth one.

**Keywords:** Linear plus linear fractional programs with absolute value functions; Equivalent optimization problems.

## 1 INTRODUCTION

Fractional programming problems occur frequently in modeling of real-world problems, in particular, when one needs to optimize the efficiency of certain activities. Several researchers investigated different kinds of fractional programming problems [1]-[4]. In particular, several authors considered linear plus linear fractional problems. They suggested some methods to solve it [2], [4]. But, by notice to the difficultness to deal with problems with absolute value functions, linear plus linear fractional problem with absolute value functions have been noted recently. Cadha and Chadha consider it as follows:

$$\begin{aligned} \max \quad & Z(x) = \sum_{j=1}^n c_j |x_j| + \frac{\sum_{j=1}^n p_j |x_j| + p_0}{\sum_{j=1}^n q_j |x_j| + q_0} \\ & = C(x) + \frac{P(x)}{Q(x)} \\ \text{s.t.} \quad & Ax = b, \end{aligned} \quad (1)$$

where  $x$  is unrestricted,  $A$  is an  $m \times n$  matrix and  $b$  is a column vector  $m \times 1$ .

Following transformation can be used to convert Problem (1) into a linear plus linear fractional problem with nonnegative variables [1]:

$$\begin{aligned} x_j &= x_j^+ - x_j^-, \text{ for } j = 1, \dots, n \\ x_j^+ &\geq 0, \quad x_j^- \geq 0 \\ |x_j| &= x_j^+ + x_j^- \\ x_j^+ x_j^- &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Transformation (2) without the restriction  $x_j^+ x_j^- = 0$ , converts Problem (1) into the following smooth one:

$$\begin{aligned} \max \quad & \widehat{Z}(x) = \sum_{j=1}^n c_j x_j^+ + \sum_{j=1}^n c_j x_j^- \\ & + \frac{\sum_{j=1}^n p_j x_j^+ + \sum_{j=1}^n p_j x_j^- + p_0}{\sum_{j=1}^n q_j x_j^+ + \sum_{j=1}^n q_j x_j^- + q_0} \\ \text{s.t.} \quad & Ax^+ - Ax^- = b \\ & x^+, \quad x^- \geq 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Since we ignore the restriction  $x_j^+ x_j^- = 0$  to obtain Problem (3), Problems (1) and (3) cannot always be equivalent. This paper generalizes the results in [1] and presents some conditions under which both problems may not be equivalent. These

\*Corresponding Author



conditions are determined so that neither simplex-type algorithms nor the other algorithms for linear programming can solve Problem (1). Indeed, it is shown that we have to consider the restriction  $x_j^+ x_j^- = 0$ .

## 2 MAIN RESULTS

The concept of Equivalent optimization problems is defined as follows:

**Definition 2.1.** ([3]) *Two optimization problems are said to be equivalent if one of them can be converted to the other using a transformation, and one of the following conditions holds:*

- (i) *both problems are infeasible;*
- (ii) *both problems have the unbounded optimal value  $+\infty$  or  $-\infty$ ;*
- (iii) *both problems have finite optimal solutions with equal optimal values.*

Throughout this paper  $X_1$  and  $X_3$  presents the feasible sets of Problem (1) and (3), respectively:

$$X_1 = \{x \in \mathbf{R}^n : Ax = b\},$$

and

$$X_3 = \{x \in \mathbf{R}^{2n} : Ax^+ - Ax^- = b, \ x^+, \ x^- \geq 0\}.$$

It can easily verify that  $X_1$  and  $X_3$  are both empty or not i.e., Problems (1) and (3) are both infeasible or feasible. Thus, without loss of generality, we assume that  $X_1 \neq \emptyset$  and hence  $X_3 \neq \emptyset$ . The following theorem presents some circumstances under which Problems (1) and (3) cannot always be equivalent.

**Theorem 2.2.** *Let  $X_1 \neq \emptyset$ . Problems (1) and (3) may not be equivalent if one of the following conditions holds:*

- (i)  $\exists k \in \{1, \dots, n\} : c_k > 0, \ q_k \neq 0$ ;
- (ii)  $\exists k \in \{1, \dots, n\} : c_k > 0, \ q_k = 0$ , and  $Q(x) > 0, \ \forall x \in X_1$ ;

- (iii)  $\exists j \in \{1, \dots, n\} : c_k = 0, \ p_k > 0, \ q_k = 0$ , and  $Q(x) > 0, \ \forall x \in X_1$ .

In fact, the results in this paper are in the follow of the Results presented by Chadha and Chadha [1]. In order to compare the results in [1] and in this paper some explanatory notes are as follows:

- Chadha and Chadha considered  $X_1$  is bounded while our results are correct for both bounded and unbounded feasible set  $X_1$ .
- They assume that  $C(x), \ P(x) \geq 0$ , and  $Q(x) > 0$  for every  $x \in X_1$ . But, we have no restriction on the sign of  $C(x)$  and  $P(x)$  and even Case (i) in Theorem (2.2) is independent on the sign of  $Q(x)$ .
- They restricted the sign of all  $c_j, \ p_j$  and  $q_j$  for  $j = 1, \dots, p$ . In contrast, the sign of only one  $c_k, p_k$ , and  $q_k$ .
- They presented some conditions under which simplex-type algorithms provided by Teterev [4] and Carosi and Martein [2] cannot be used to solve Problem (1). But, this paper presents some conditions under which neither simplex-type algorithms nor the other algorithms in linear programming can be used to solve Problem (1).

Under conditions presented in Theorem 2.2, it is not possible to solve Problem (1) by using an smooth problem. In order to solve Problem (1) one has to use the nonsmooth programming methods. However, these methods are not usually application oriented. So, finding a method which can solve it in a reasonable time is an open problem which can be noted in further researches.





### 3 NUMERICAL EXAMPLES

This section is devoted to some easy examples to clarify the conditions of Theorem (2.2).

**Example 3.1.** Consider the following linear plus linear fractional problem with absolute value functions:

$$\begin{aligned} \max \quad & Z(x) = 2|x_1| - |x_2| + \frac{|x_1| - 1}{-|x_1| - |x_2| - 2} \\ \text{s.t.} \quad & 0 \leq x_1 \leq 1 \\ & 0 \leq x_2 \leq 1, \end{aligned} \quad (4)$$

In this problem  $c_1 > 0$  and  $q_1 \neq 0$ . Regarding the compactness of feasible set Problem (4) has a finite optimal value. Transformation (2), without the restriction  $x_j^+ x_j^- = 0$ , converts Problem (4) into the following smooth one:

$$\begin{aligned} \max \quad & \widehat{Z}(x) = 2x_1^+ + 2x_1^- - x_2^+ - x_2^- \\ & + \frac{x_1^+ + x_1^- - 1}{-x_1^+ - x_1^- - x_2^+ - x_2^- - 2} \\ \text{s.t.} \quad & 0 \leq x_1^+ - x_1^- \leq 1 \\ & 0 \leq x_2^+ - x_2^- \leq 1 \\ & x_1^+, x_1^-, x_2^+, x_2^- \geq 0. \end{aligned} \quad (5)$$

$(x_1^+, x_1^-, x_2^+, x_2^-) = (\theta, \theta, 0, 0)$  is a feasible solution of the above problem for every  $\theta \geq 0$  and the value of objective function is:

$$\widehat{Z}(\theta) = 4\theta + \frac{2\theta - 1}{-2\theta - 2},$$

where  $\lim_{\theta \rightarrow +\infty} \widehat{Z}(\theta) = +\infty$ . Thus, the above problem has an unbounded optimal value and it is not equivalent by Problem (6).

**Example 3.2.** Consider the following problem:

$$\begin{aligned} \max \quad & Z(x) = |x_1| + |x_2| \\ & + \frac{4|x_1| - 4|x_2| + 2}{|x_2| + 3} \\ \text{s.t.} \quad & 0 \leq x_1 \leq 1 \\ & 0 \leq x_2 \leq 1, \end{aligned} \quad (6)$$

In this problem  $c_1 > 0$ ,  $p_1 \geq 0$ ,  $q_1 = 0$ , and  $D(x) > 0$  over the feasible set. By considering the

compactness of feasible set Problem (6) has a finite optimal value. Transformation (2), without the restriction  $x_j^+ x_j^- = 0$ , converts Problem (6) into the following smooth one:

$$\begin{aligned} \max \quad & \widehat{Z}(x) = x_1^+ + x_1^- + x_2^+ + x_2^- \\ & + \frac{4x_1^+ + 4x_1^- - 4x_2^+ - 4x_2^- + 2}{x_2^+ + x_2^- + 3} \\ \text{s.t.} \quad & 0 \leq x_1^+ - x_1^- \leq 1 \\ & 0 \leq x_2^+ - x_2^- \leq 1 \\ & x_1^+, x_1^-, x_2^+, x_2^- \geq 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Similar to Example 3.1, it can be shown that Problem (7) is unbounded. Therefore, Problems (6) and (7) are not equivalent.

**Example 3.3.** Consider the following problem:

$$\begin{aligned} \max \quad & Z(x) = -|x_2| \\ & + \frac{2|x_1| - |x_2| + 4}{|x_2| + 1} \\ \text{s.t.} \quad & 0 \leq x_1 \leq 1 \\ & 0 \leq x_2 \leq 1, \end{aligned} \quad (8)$$

In this problem  $c_1 = 0$ ,  $p_1 > 0$ ,  $q_1 = 0$ , and  $D(x) > 0$  over the feasible set. Problem (6) converts to the the following problem:

$$\begin{aligned} \max \quad & \widehat{Z}(x) = -x_2^+ - x_2^- \\ & + \frac{2x_1^+ + 2x_1^- - x_2^+ - x_2^- + 4}{x_2^+ + x_2^- + 1} \\ \text{s.t.} \quad & 0 \leq x_1^+ - x_1^- \leq 1 \\ & 0 \leq x_2^+ - x_2^- \leq 1 \\ & x_1^+, x_1^-, x_2^+, x_2^- \geq 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Similar to the above examples it can be verified that Problem (8) is bounded while Problem (9) is unbounded.

### References

- [1] S. Cahdha and V. Chadha, "Absolute-value functional linearplus-linear fractional programming", International J. Oper. Res. Optim. Vol. 2, No. 2, pp. 239-246, 2011.



- [2] L. Carosi and L. Martein, “A sequential method for a class of pseudoconcave fractional problems, Central Eur. J. Oper. Res. Vol. 16, No. 2, pp. 153-164, 2008.
- [3] M. Soleimani-damaneh, “On fractional programming problems with absolute-value functions”, International J. Computer Math. Vol. 88, No. 4, pp. 661664, 2011.
- [4] A.G.Teterev, “On a generalization of linear and piecewise linear programming”, Matekon. Vol. 6 pp. 246-259, 1970.

## برنامه ریزی چند هدفی فازی با رویکرد دو قطبی

داریوش بخشایش، دانشجوی کارشناسی ارشد تحقیق در عملیات، دانشگاه بیرجند، dariushbakhshayesh@birjand.ac.ir

حمید بیگدلی \*، دانشجوی دکتری تحقیق در عملیات، دانشگاه بیرجند، h.bigdeli@birjand.ac.ir

حسن حسن‌پور، عضو هیات علمی گروه ریاضی، دانشگاه بیرجند، hhassanpour@birjand.ac.ir

**چکیده:** در این مقاله یک روش برای حل مسئله برنامه‌ریزی خطی چند هدفی فازی با رویکرد دوقطبی ارائه می‌شود. در روش حل پیشنهادی، ابتدا مسئله برنامه‌ریزی چند هدفی با پارامترهای فازی به یک مسئله برنامه‌ریزی خطی چند هدفی معمولی تبدیل و سپس برای رسیدن به آرمان‌های تصمیم گیرنده از رویکرد دو قطبی استفاده می‌شود.

**کلمات کلیدی:** برنامه‌ریزی خطی چند هدفی فازی، روش دو قطبی، عملگر تجمیع

### مقدمه

صورت زیر می‌باشد:

$$\tilde{A} = \{(x, \mu_{\tilde{A}}(x)) | x \in X\}$$

که در آن  $\mu_{\tilde{A}} : X \rightarrow [0, 1]$  را تابع عضویت مجموعه‌ی فازی  $\tilde{A}$  و  $\mu_{\tilde{A}}(x)$  را درجه‌ی عضویت عنصر  $x \in X$  گویند. مجموعه‌ی عناصری از  $\tilde{A}$  که درجه‌ی عضویت آنها بزرگتر از صفر است را تکیه‌گاه  $\tilde{A}$  گویند. یعنی:

$$Supp(\tilde{A}) = \{x \in X : \mu_{\tilde{A}}(x) > 0\}$$

فرض کنید  $\tilde{A}$  یک زیر مجموعه‌ی فازی از مجموعه‌ی مرجع  $X$  باشد و  $\alpha \in [0, 1]$ . در این صورت

بسیاری از تصمیم‌گیری‌های مدیران تحت تاثیر عوامل مختلف کمی و کیفی قرار دارد که نکته‌ی قابل ذکر، وجود تقابل میان این عوامل است. ساکاوا [۳] یک روش برای حل مسئله برنامه‌ریزی چند هدفی با پارامترهای فازی ارائه داد و د. دیوبی و آ. مهرا [۱] یک روش دوقطبی برای حل مسائل چند هدفی فازی با ضرایب قطعی ارائه دادند. در این مقاله، یک مسئله برنامه‌ریزی خطی چند هدفی که تمام پارامترهای آن فازی‌اند، با در نظر گرفتن آرمان‌های تصمیم گیرنده، به روش دوقطبی حل می‌شود.

### مفاهیم اولیه

مجموعه‌ی  $\alpha$ -برش  $\tilde{A}$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\tilde{A}_{\alpha} = \{x \in X \mid \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha\}$$

نرمال، مجموعه‌ای است که درجه‌ی عضویت حداقل یکی از اعضای آن برابر یک باشد. همچنین یک عدد فازی،

فرض کنید  $X$  مجموعه‌ی مرجع و شامل عناصری باشد که با  $x$  مشخص می‌شوند. در این صورت مجموعه‌ی فازی  $\tilde{A}$  در  $X$ ، یک مجموعه از زوج‌های مرتب به

مجموعه‌ای فازی مانند  $\tilde{M}$  با تابع عضویت  $\mu_{\tilde{M}}(x)$  با شرایط زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned} & \text{maximize } (\tilde{C}_1 x, \dots, \tilde{C}_k x)^T \\ & \text{s.t} \\ & x \in X(\tilde{A}, \tilde{B}) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \tilde{A}_i x \leq \tilde{B}_i \\ & i = 1, \dots, m, x \geq 0\} \end{aligned} \quad (1)$$

که  $\tilde{B}_i$  و  $\tilde{A}_i = (\tilde{A}_{i1}, \dots, \tilde{A}_{in})$ ,  $\tilde{C}_r = (\tilde{C}_{r1}, \dots, \tilde{C}_{rn})$  نشان دهنده‌ی پارامترهای فازی بکار رفته در توابع هدف و محدودیت‌ها هستند. نماد  $\leq$  در قیود به معنی  $\leq$  فازی و نماد  $\tilde{max}$  در توابع هدف نشان دهنده‌ی بیشینه سازی فازی است. به عبارت دیگر با در نظر گرفتن مقدار آرمانی (مقدار مورد انتظار)  $\tilde{Z}_r$  برای تابع هدف  $r$  ام مسئله می‌تواند به صورت زیر بیان شود:

$$\begin{aligned} & \text{Find } x \\ & \text{s.t} \\ & \tilde{C}_r x \geq \tilde{Z}_r \quad r = 1, \dots, k \\ & \tilde{A}_i x \leq \tilde{B}_i \quad i = 1, \dots, m \\ & x \geq 0 \end{aligned} \quad (2)$$

برای حل مسئله، ابتدا با در گرفتن  $\alpha \in [0, 1]$  مسئله‌ی (۱) را به مسئله‌ی زیر تبدیل می‌کنیم:

$$\begin{aligned} & \text{maximize } (c_1 x, \dots, c_k x)^T \\ & \text{s.t} \\ & x \in X(a, b) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_i x \leq b_i \\ & i = 1, \dots, m, x \geq 0\} \\ & (a, b, c) \in (\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C})_\alpha \end{aligned} \quad (3)$$

که در آن

$(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C})_\alpha = \{(a, b, c) \mid a \in \tilde{A}_\alpha, b \in \tilde{B}_\alpha, c \in \tilde{C}_\alpha\}$  را مجموعه‌ی  $\alpha$ -برش  $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C})$  گویند. در مسئله‌ی فوق،  $a$ ،  $b$  و  $c$  همچون  $x$  مجهول می‌باشند. لذا مسئله‌ی (۳) یک مسئله‌ی غیر خطی است. اما توجه به اینکه  $x \geq 0$  و نواحی شدنی برای  $a_{ij}$ ،  $c_{rj}$  و  $b_i$  به ترتیب بازه‌های

۱. یک نگاشت پیوسته از  $\mathbb{R}^1$  به بازه  $[0, 1]$  باشد.

۲.  $\forall x \in (-\infty, c], \mu_{\tilde{M}}(x) = 0$ .

۳. در بازه  $[c, a]$  اکیدا صعودی و پیوسته باشد.

۴.  $\forall x \in [a, b], \mu_{\tilde{M}}(x) = 1$ .

۵. در بازه  $[b, d]$  اکیدا نزولی و پیوسته باشد.

۶.  $\forall x \in [d, \infty), \mu_{\tilde{M}}(x) = 0$ .

**تعریف ۱ [۱]:** تابع  $f: I^p \rightarrow I$  را که  $I = [0, 1]$  عملگر تجميع گوييم هرگاه:

۱. به ازای  $p = 1$ ،  $f(x) = x$

۲.  $f(0, \dots, 0) = 0, f(1, \dots, 1) = 1$

۳. اگر  $(x_1, \dots, x_p) \leq (y_1, \dots, y_p)$  آنگاه  $f(x_1, \dots, x_p) \leq f(y_1, \dots, y_p)$

**تعریف ۲:** نگاشت  $F: I^p \rightarrow I$  را که به ازای هر  $(a_1, \dots, a_p) \in I^p$ ،  $F(a_1, \dots, a_p) = \sum_{k=1}^p w_k b_k$ ،  $(a_1, \dots, a_p) \in I^p$  که در آن  $\sum_{k=1}^p w_k = 1$ ،  $w_k \in [0, 1]$ ،  $b_k$  و  $a_k$  امین عنصر بزرگ مجموعه‌ی  $\{a_1, \dots, a_p\}$  است، یک عملگر میانگین وزن دار مرتب شده با بعد  $p$  می‌نامند. برای نمونه عملگرهای  $\max$  و  $\min$  دو عملگر میانگین وزن دار مرتب شده با بردارهای وزن به ترتیب  $(0, \dots, 1)$  و  $(1, \dots, 0)$  می‌باشند.

## ساختار مسئله و روش پیشنهادی

یک مسئله‌ی برنامه ریزی خطی چند هدفی فازی را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$D_P$ ، مسئله به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\begin{aligned} \max \min \{ \mu_{D_P}(x), \mu_{D_N}(x) \} \\ \text{s.t.} \\ x \geq 0 \end{aligned} \quad (5)$$

یا به طور معادل

$$\begin{aligned} \max \lambda \\ \text{s.t.} \\ F(\mu_{G_1}(c_{1\alpha}^R x), \dots, \mu_{G_k}(c_{k\alpha}^R x)) \geq \lambda \\ \mu_{R_i}(a_{i\alpha}^L x) \geq \lambda, \quad i = 1, \dots, m \\ x \geq 0 \\ 0 \leq \lambda \leq 1 \end{aligned} \quad (6)$$

با حل این مسئله یک جواب رضایت بخش برای تصمیم گیرنده به دست می‌آید.  
مثال: مسئله‌ی زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{aligned} \max \quad & \tilde{C}_{11}x_1 + \tilde{C}_{22}x_2 \geq 4 \quad g_1 = 2 \\ \max \quad & \tilde{C}_{22}x_1 + \tilde{C}_{11}x_2 \geq 2 \quad g_2 = 1 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + \tilde{A}_{12}x_2 \leq 3 \quad r_1 = 1 \\ & \tilde{C}_{22}x_1 + \tilde{C}_{11}x_2 \leq \tilde{B}_2 \quad r_2 = 2 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{aligned} \quad (7)$$

که در آن  $\tilde{C}_{11}$ ،  $\tilde{C}_{22}$ ،  $\tilde{A}_{12}$  و  $\tilde{B}_2$  اعداد فازی مثلثی با توابع عضویت

$$\begin{aligned} \mu_{\tilde{C}_{11}}(c_{11}) &= \max(1 - 0.5|c_{11} - 4|, 0) \\ \mu_{\tilde{C}_{22}}(c_{22}) &= \max(1 - |c_{22} - 0.5|, 0) \\ \mu_{\tilde{A}_{12}}(a_{12}) &= \max(1 - 2|a_{12} - 1|, 0) \\ \mu_{\tilde{B}_2}(b_2) &= \max(1 - 2|b_2 - 0.75|, 0) \end{aligned}$$

می‌باشند. برای  $\alpha = 0.5$  و به کمک تعریف مجموعه‌ی  $\alpha$ -برش  $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C})$  داریم:

$$\begin{aligned} c_{11} \in [3, 5] \quad , \quad c_{22} \in [0, 1] \\ a_{12} \in [0.75, 1.25] \quad , \quad b_2 \in [0.5, 1] \end{aligned}$$

بسته‌ی  $[a_{ij\alpha}^L, a_{ij\alpha}^R]$ ،  $[c_{rj\alpha}^L, c_{rj\alpha}^R]$  و  $[b_{i\alpha}^L, b_{i\alpha}^R]$  می‌باشند، مسئله را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} \maximize \quad & (c_{1\alpha}^R x, \dots, c_{k\alpha}^R x)^T \\ \text{s.t.} \\ & a_{i\alpha}^L x \leq b_{i\alpha}^R, i = 1, \dots, m \\ & x \geq 0 \end{aligned} \quad (4)$$

که در آن  $b_{i\alpha}^L = [b_{i1\alpha}^L, \dots, b_{in\alpha}^L]^T$  و  $a_{i\alpha}^L = [a_{i1\alpha}^L, \dots, a_{in\alpha}^L]$  اکنون توابع عضویت خطی زیر را برای توابع هدف و محدودیت‌های مسئله‌ی فوق در نظر می‌گیریم:

$$\mu_{G_r}(c_{r\alpha}^R x) = \begin{cases} 0 & c_{r\alpha}^R x < \bar{Z}_r - g_r \\ 1 - \frac{\bar{Z}_r - c_{r\alpha}^R x}{g_r} & \bar{Z}_r - g_r \leq c_{r\alpha}^R x < \bar{Z}_r \\ 1 & c_{r\alpha}^R x \geq \bar{Z}_r \end{cases}$$

$$\mu_{R_i}(a_{i\alpha}^L x) = \begin{cases} 0 & a_{i\alpha}^L x > b_{i\alpha}^R + r_i \\ 1 - \frac{a_{i\alpha}^L x - b_{i\alpha}^R}{r_i} & b_{i\alpha}^R < a_{i\alpha}^L x \leq b_{i\alpha}^R + r_i \\ 1 & a_{i\alpha}^L x \leq b_{i\alpha}^R \end{cases}$$

که  $g_r$  انحراف مجاز تابع هدف  $r$  ام از آرمان  $\bar{Z}_r$  به سمت چپ و  $r_i$  انحراف مجاز  $a_{i\alpha}^L x$  از  $b_{i\alpha}^R$  به سمت راست می‌باشند. یکی از روش‌های حل مسائل چند هدفی فازی به شکل (۴)، روش دوقطبی است که در آن برای تجميع توابع عضویت اهداف، از عملگر میانگین وزن‌دار مرتب شده و برای تجميع توابع عضویت محدودیت‌ها، از عملگر مینیمم استفاده می‌شود [۱]. یعنی قرار می‌دهیم:

$$\mu_{D_P}(x) = F(\mu_{G_1}(c_{1\alpha}^R x), \dots, \mu_{G_k}(c_{k\alpha}^R x))$$

$$\mu_{D_N}(x) = \min(\mu_{R_1}(a_{1\alpha}^L x), \dots, \mu_{R_m}(a_{m\alpha}^L x))$$

ساختار عملگر  $F$  به گونه‌ای است که اگر میزان رضایت در دستیابی به آرمان یک هدف افزایش یابد، رضایت کل تصمیم گیرنده از جواب نیز باید افزایش یابد؛ یعنی عملگر میانگین وزن‌دار مرتب شده، اکیداً یکنواست. پس از معرفی  $\mu_{D_P}(x)$  و  $\mu_{D_N}(x)$ ، با به کار گیری تصمیم فازی بلمن و زاده [۱] برای مجموعه‌های فازی  $D_N$  و

که از حل این مسئله جواب رضایت بخش  
 $(\lambda^*, x_1^*, x_2^*) = (0/7857, 0/7143, 0)$   
 می‌آید.

## نتایج

در این مقاله یک روش دو قطبی برای حل مسئله برنامه ریزی چند هدفی با پارامترهای فازی و با در نظر گرفتن آرمان‌هایی برای توابع هدف، ارائه شد. در روش پیشنهادی ابتدا یک مسئله برنامه ریزی چند هدفی با پارامترهای فازی به صورت یک مسئله برنامه ریزی قطعی تبدیل شده و سپس برای برآورده ساختن آرمان‌های تصمیم گیرنده برای اهداف و محدودیت‌ها به ترتیب از دو عملگر میانگین وزن دار مرتب شده و مینیمم برای تجمیع آنها استفاده می‌شود. سپس با به کار گیری تصمیم فازی بلمن و زاده [۱] یک مسئله برنامه ریزی خطی معمولی به دست آمد که با حل این مسئله، یک جواب رضایت بخش برای تصمیم گیرنده به دست می‌آید.

## مراجع

- [1] D. Dubey, A. Mehra, *A bipolar approach in fuzzy multi-objective linear programming*, Fuzzy Sets and Systems, 2013, pp.127-141.
- [2] H.J. Zimmerman, *Fuzzy Programming and Linear Programming with several Objective functions*. Fuzzy Sets and Systems, 1978, pp.45-55.
- [3] M. Sakawa, *Fuzzy Sets and Interactive Multiobjective Optimization*, Plenum Press, New York and London, 1993.

لذا مسئله (۴) را به صورت زیر داریم:

$$\begin{aligned}
 \max \quad & 5x_1 + 2x_2 \leq 4 \quad g_1 = 2 \\
 \max \quad & 2x_1 + x_2 \leq 2 \quad g_2 = 1 \\
 \text{s.t.} \quad & x_1 + 0/75x_2 \leq 3 \quad r_1 = 1 \quad (8) \\
 & 2x_1 + x_2 \leq 1 \quad r_2 = 2 \\
 & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$

با در نظر گرفتن آرمان‌های  $\bar{Z}_1 = 4$  و  $\bar{Z}_2 = 2$ ، حدود تخلف مجاز  $g_1 = 2$  و  $g_2 = 1$  برای توابع هدف و  $r_1 = 1$  و  $r_2 = 2$  برای قیود، طبق توابع عضویت خطی در نظر گرفته شده برای توابع هدف و محدودیت‌ها داریم:

$$\begin{aligned}
 \mu_{G_1}(c_{1\alpha}^R x) &= \begin{cases} 0 & c_{1\alpha}^R x < 2 \\ 2/5x_1 + x_2 - 1 & 2 \leq c_{1\alpha}^R x < 4 \\ 1 & c_{1\alpha}^R x \geq 4 \end{cases} \\
 \mu_{G_2}(c_{2\alpha}^R x) &= \begin{cases} 0 & c_{2\alpha}^R x < 1 \\ 2x_1 + x_2 - 1 & 1 \leq c_{2\alpha}^R x < 2 \\ 1 & c_{2\alpha}^R x \geq 2 \end{cases} \\
 \mu_{R_1}(a_{1\alpha}^L x) &= \begin{cases} 0 & a_{1\alpha}^L x > 4 \\ -x_1 - 7/5x_2 + 4 & 3 < a_{1\alpha}^L x \leq 4 \\ 1 & a_{1\alpha}^L x \leq 3 \end{cases} \\
 \mu_{R_2}(a_{2\alpha}^L x) &= \begin{cases} 0 & a_{2\alpha}^L x > 3 \\ -x_1 - 5x_2 + 1/5 & 1 < a_{2\alpha}^L x \leq 3 \\ 1 & a_{2\alpha}^L x \leq 1 \end{cases}
 \end{aligned}$$

حال اگر  $F$  را عملگر  $\max$  با بردار وزن  $(1, 0)$  در نظر بگیریم، خواهیم داشت:

$$\mu_{D_F}(x) = 2/5x_1 + x_2 - 1$$

و در نهایت مسئله زیر را داریم:

$$\begin{aligned}
 \max \quad & \lambda \\
 \text{s.t.} \quad & 2/5x_1 + x_2 - 1 \geq \lambda \\
 & -x_1 - 0/75x_2 + 4 \geq \lambda \quad (9) \\
 & -x_1 - 0/5x_2 + 1/5 \geq \lambda \\
 & 0 \leq \lambda \leq 1, \quad x \geq 0
 \end{aligned}$$